Задача 11 - 3 Равновесие и устойчивость звёзд.

1.1 Средняя плотность звезды рассчитывается «по определению»

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} \approx 1\cdot 10^3\ \frac{кг}{м^3}. \tag{1}$$

1.2 Так как плотность звезды предлагается считать постоянной, то изменение давления при изменении расстояния до центра звезды на величину Δr описывается «гидростатической» формулой

$$\Delta P = -\rho g \Delta r\ . \tag{2}$$

Так как ускорение свободного падения зависит от расстояния до центра по закону

$$g(r) = g_0 \frac{r}{R}, \tag{3}$$

где $g_0 = G\dfrac{M}{R^2}$ - ускорение на поверхности звезды, то уравнение (2) приобретает вид

$$\Delta P = -\frac{\rho g_0}{R} r \Delta r\ . \tag{4}$$

Проводя суммирование по тонким сферическим слоям и, учитывая, что на поверхности давление равно нулю, получим

$$P_0 - \frac{\rho g_0}{R}\frac{R^2}{2} = 0 \tag{5}$$

Откуда следует, что давление в центре звезды оценивается по формуле

$$P_0 = \frac{\rho g_0}{R}\frac{R^2}{2} = \frac{3}{8\pi}\frac{GM^2}{R^4} \approx 1\cdot 10^{14}\ Па \tag{5}$$

1.3 Для оценки температуры можно воспользоваться уравнением состояния идеального газа (с учетом, что молярная масса газа равна $\mu = m_p N_A$)

$$P_0 = \frac{\rho}{m_p N_A} R_G T \quad \Rightarrow \quad \bar{T} = P_0 \frac{m_p}{\rho k} == \frac{\rho g_0 R}{2}\frac{m_p}{\rho k} = \frac{m_p}{2k} G \frac{M}{R} \approx 1\cdot 10^7\ K\ . \tag{6}$$

1.1 Для оценки будем считать, что ускорение свободного падения в мало изменяется при погружении на 10% радиуса и равно ускорению свободного падения на поверхности

Тогда из закона равноускоренного движения можно получить искомую оценку времени падения

$$0{,}1R = \frac{g_0 t_H^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_H = \sqrt{\frac{0{,}2R^3}{GM}} \approx 8\cdot 10^2\ c \tag{7}$$

1.2 Тепловая энергия звезды оценивается по формуле

$$W_E = \frac{3}{2}kT\cdot 2\frac{M}{m_p} = 3\frac{M}{m_p}kT \approx 6\cdot 10^{41}\ Дж, \tag{8}$$

Здесь учтено, что электроны имеют такую же энергию, как и протоны.

В единицу времени звезда излучает с поверхности энергию, равную

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_s^4 \approx 4\cdot 10^{26}\ Вт. \tag{9}$$

Тогда оценка теплового времени дается формулой

$$t_T = 0{,}1\frac{W_T}{L} \approx 1{,}5\cdot 10^{14}\ c \approx 5\cdot 10^6\ лет. \tag{10}$$

1.3 Ядерное время звезды t_N оценивается аналогично. Ядреная энергия, выделяющаяся в результате ядерных реакций равна

$$W_N = 0{,}1M\beta c^2 \approx 2\cdot 10^{44}\ Дж \tag{11}$$

Поэтому

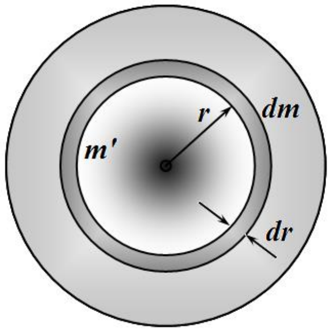
$$t_N = 0{,}1\frac{W_N}{L} \approx 5\cdot 10^{16}\,c \approx 2\cdot 10^{9}\,лет. \qquad (12)$$

Часть 2. Анализ равновесия звёзд

2.1 В данному случае нет необходимости находить полную формулу для гравитационной энергии, достаточно только определить вид зависимости, который проще всего найти с помощью метода размерностей. Простой анализ показывает, что искомая зависимость должна иметь вид

$$W_G = -\alpha G\frac{M^2}{R}, \qquad (13)$$

Где α - безразмерный коэффициент. Так как гравитационная энергия есть энергия притяжения, то она является отрицательной.



Примечание. При необходимости можно рассчитать и точное численное значение этого коэффициента. Для этого выделим внутри однородного шара тонкий сферический слой радиуса r *и толщиной* dr. *Гравитационная энергия взаимодействия этого слоя с шаром определяется по формуле*

$$W_G = -G\frac{m'dm}{r}.$$

где $m' = \frac{4}{3}\pi r^3\rho = M\frac{r^3}{R^3}$ *- масса части шара, находящейся под рассматриваемым слоем,* $dm = 4\pi r^2 dr\rho = 3M\frac{r^2 dr}{R^3}$ *- масса выделенного слоя. Подставим эти значения в формулу для гравитационной энергии и проведем элементарное интегрирование по всем слоям, в результате получим*

$$W_G = -\int_0^R G\frac{m'dm}{r} = -3GM^2\int_0^R \frac{r^3}{R^3}\frac{r^2dr}{R^3}\frac{1}{r} = -\frac{3}{5}G\frac{M}{R}.$$

2.2 Полная энергия звезды состоит из ее внутренней энергии, определяемой формулой (1), приведенной в условии задачи, и гравитационной энергией, найденной в предыдущем пункте:

$$W = M\varepsilon + W_G = M\left(K(T)\rho^{\gamma-1} + L(T)\right) - \alpha G\frac{M^2}{R}, \qquad (14)$$

Теперь необходимо выразить плотность звезды через ее массу и радиус:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad (15)$$

Окончательное выражение для энергии принимает вид

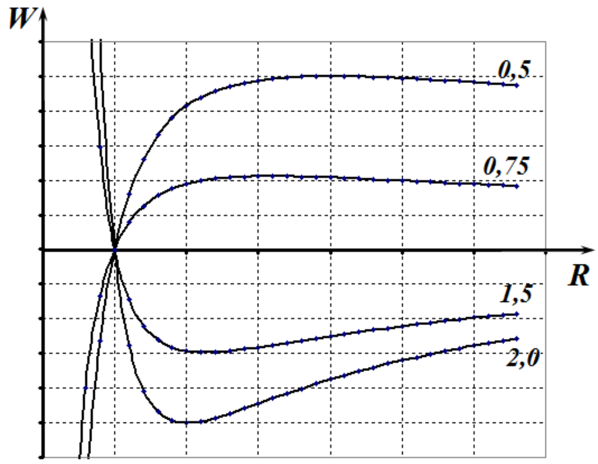
$$W = M\varepsilon + W_G = M\left(K(T)\left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)^{\gamma-1} + L(T)\right) - \alpha G\frac{M^2}{R} = \qquad (16)$$

$$= A\frac{M^{\gamma}}{R^{3\gamma-3}} - B\frac{M^2}{R} + C$$

где A, B, C - некоторые положительные величины, не зависящие от массы и радиуса планеты, причем последнее постоянное слагаемое может быть опущено.

Схематический вид зависимости $W(R)$ легко установить, рассматривая поведение функции в предельных случаях $R \to 0$ и $R \to \infty$. Простой анализ показывает, что при $3\gamma - 3 > 1$ данная функция имеет точку минимума, в противном случае она имеет точку максимума.

Для примера на рисунке показаны графики функции $W = \frac{1}{R^{\alpha}} - \frac{1}{R}$, при различных значениях показателя степени α, которые приведены на рисунке.



2.3 Чтобы положения равновесия (ему соответствуют точки экстремума энергии)было устойчивым необходимо, чтобы функция имела минимум энергии. В нашем случае, как это следует из анализа зависимости $W(R)$, это условие достигается при

$$3\gamma - 3 > 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma > \frac{4}{3}. \tag{17}$$

2.4 Чтобы получить зависимость массы звезды от ее плотности (помните, что радиус звезды не является постоянным!) достаточно выразить ее радиус

$$R = \sqrt[3]{\frac{M}{\frac{4}{3}\pi\rho}} = \beta M^{\frac{1}{3}} \rho^{-\frac{1}{3}} \tag{18}$$

И подставить его в выражение для полной энергии (16)

$$W = A\frac{M^{\gamma}}{R^{3\gamma-3}} - B\frac{M^2}{R} = A' M \rho^{\gamma-1} - B' M^{\frac{5}{3}} \rho^{\frac{1}{3}}, \tag{19}$$

2.5 Условие устойчивого равновесия и в этом варианте может быть сформулировано аналогично – функция $W(\rho)$ должна иметь точку минимума.