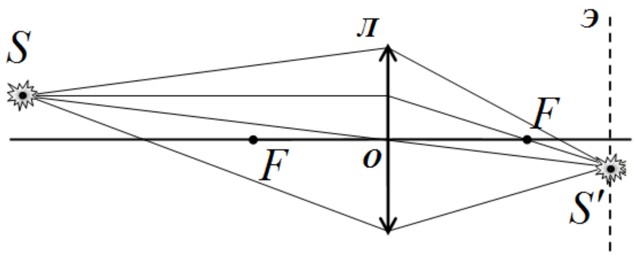
Задача 3. Геометрическая оптика и … никакого фотошопа!

Решение этой задачи вызвало серьезные трудности у участников олимпиады и их руководителей. Поэтому мы посчитали возможным привести здесь не только полное решение данной задачи, но и достаточно обширные пояснения и комментарии.

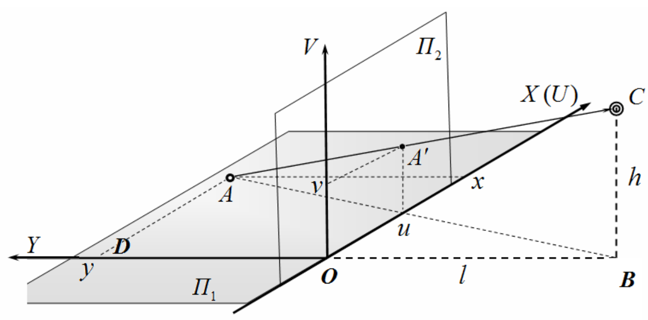
Как формируется изображение на экране.

Начнем с того, что человек видит (ощущает) только то свет, который попадает ему в глаз. И никаким способом человек не может определить, откуда на самом деле пришли лучи света, попадающие ему в глаз. Упрощенная оптическая схема глаза принципиально совпадает с оптической схемой фотоаппарата, поэтому дальнейшие рассуждение в одинаковой степени относятся как к глазу, так и к фотоаппарату. Принципиально, их основными оптическими элементами являются собирающая линза и экран (рис. 1): у глаза зрачок и сетчатка, соответственно; у фотоаппарата – объектив и светочувствительная матрица.



Лучи света, идущие от источника S, попадающие на линзу (это важно!) собираются в одной точке S' на экране, формируя точечное изображение точечного источника. Это изображение фиксируется либо матрицей фотоаппарата, либо сетчаткой глаза. Таким образом, «первоисточником» изображения является расходящийся пучок лучей, попадающих на линзу. Самым важным для дальнейших рассуждений является луч SS', проходящий через оптический центр линзы O и потому идущий без изменения направления (без преломления). Поэтому любая точка регистрируемого предмета, лежащая на прямой OS дает изображение (при надлежащей фокусировке) в одной точке S' на экране[1].

Это и есть основная идея приведенной в условии задачи «теории перспективы». Рассмотрим подробнее приведенный в условии рисунок.



Под точкой съемки C следует понимать оптический центр линзы (зрачка глаза, или объектива фотоаппарата). Так как точки A и A' лежат на одном луче, попадающем в оптический центр, их изображения на экране буду совпадать. Таким образом, приведенная «теория перспективы» объясняет, почему правила построения изображений в картинной плоскости Π_2 дают то же изображение на сетчатке, что и реальный предметы в трехмерном пространстве. Заметим, что приведенные правила можно обобщить действительно на трехмерное пространство. Для упрощения задачи мы рассматриваем только точки, лежащие на горизонтальной плоскости XY. Без особого труда можно поставить общую задачу: положение некоторой точки фотографируемого предмета задается тремя координатами (x, y, z), найдите координаты (u, v) изображения этой точки на картинной плоскости. Если основная идея построения

[1] Мы не касаемся такой интересной проблемы, как человеческой восприятие глубины (дальности до изображаемого предмета), которое обусловлено главным образом стереоскопическим эффектом. С этой же проблемой тесно связана и проблема глубины резкости изображения фотоаппарата: почему точки, находящиеся на разных расстояниях от линзы могут давать одинаково четкие изображения.

перспективных изображений усвоена, то дальнейший ход решения становится почти очевидным.

1.1 . Найдем связь между координатами точки предмета $A(x,y)$ и ее изображения $A'(u,v)$.

Из треугольника ABD следует

$$\frac{u}{l}=\frac{x}{l+y} \Rightarrow u=\frac{l}{l+y}x \qquad (1)$$

Далее рассматривая треугольники ACB и ABD, находим

$$\frac{v}{y}=\frac{h}{l+y} \Rightarrow v=\frac{h}{l+y}y \qquad (2)$$

1.2 Фотография сделана так, что солнце находится непосредственно перед фотоаппаратом, поэтому можно считать, что тени деревьев являются прямыми линиями, параллельными оси OY. Поэтому найдем уравнение изображения прямой, параллельной оси OY и пересекающей ось OX в точке с координатой x_0. Выразим из (1) координату y, получим

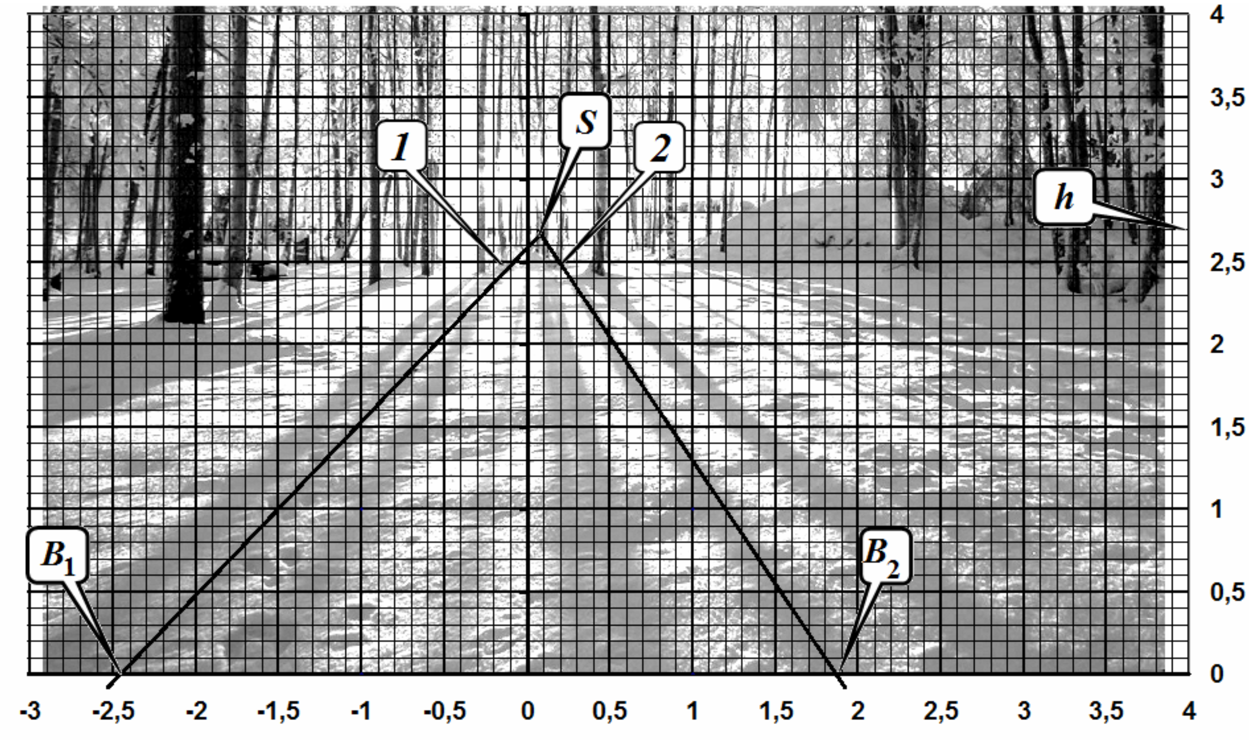
$$l+y=l\frac{x_0}{u} \Rightarrow y=l(\frac{x_0}{u}-1) \qquad (3)$$

и подставим теперь полученное выражение в (2), в результате получим уравнения изображения этой прямой $v(u)$ в плоскости изображений

$$v=\frac{hu}{lx_0}l(\frac{x_0}{u}-1) \Rightarrow v=h(1-\frac{u}{x_0}) \qquad (4)$$

Полученной выражение является уравнением прямой. Следовательно, горизонтальные тени изображаются в виде прямых линий.

1.3 Из полученного уравнения прямой (4) следует, что ее коэффициент наклона зависит от координаты x_0. Т.е. прямые параллельные тени изображаются в виде не параллельных прямых на фотографии. В этом и состоит эффект «перспективы».



1.4 Теперь можно внимательно рассматривать фотографию. Из уравнения прямой (4) следует, что при $v = 0$ $u = x_0$. Поэтому координаты x_{01}, x_{02} указанных деревьев можно найти как координаты точек пересечения теней этих деревьев с нижним срезом фотографии B_1, B_2, которая совпадает с осями X и U. Из рисунка находим, что расстояние между ними примерно равно $\Delta x \approx 4{,}3 м$. Впрочем, этот вывод можно сделать и не получая уравнение изображений теней: сами тени параллельны, поэтому расстояние между ними неизменно!

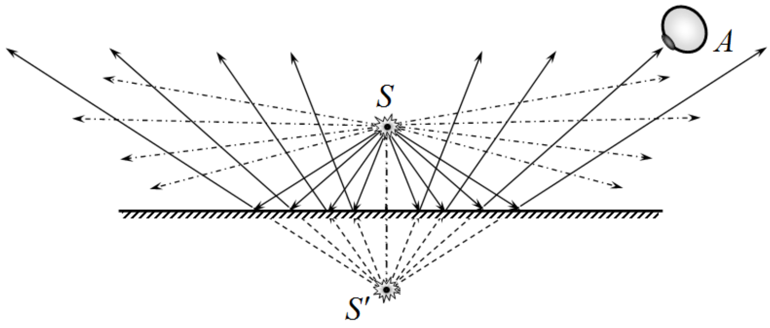
1.5 Из уравнения прямых (4) следует, что все они пресекаются в одной точке S с координатами $u_S = 0,\ \ v_S = h$ (так называемой точке схода). Поэтому продолжим тени от рассматриваемых деревьев и по координатной сетке найдем вертикальную координату точки их пересечения, которая равна высоте точке съемки $h \approx 2{,}7 м$.
Можно воспользоваться и другим более длинным путем: по рисунки найти коэффициенты уравнения прямой одной из теней и уже по ним определить искомую высоту точки съемки.

1.6 Расстояние до деревьев есть их координата y в горизонтальной плоскости предметов. Эту координату легко вычислить из формулы (3). Так для второго дерева по рисунку находим $x_0 \approx 1{,}9 м$, $u \approx 0{,}2 м$, следовательно

$$y = l\left(\frac{x_0}{u} - 1\right) \approx 5{,}0 \cdot \left(\frac{1{,}9}{0{,}2} - 1\right) \approx 42 м \qquad (5)$$

1.7 Вопрос для наблюдательных и сообразительных учеников. Тени некоторых деревьев (в правой части снимка) изогнуты, поскольку там находится … небольшой сугроб! Это обстоятельство и приводит к наблюдаемым искажениям.

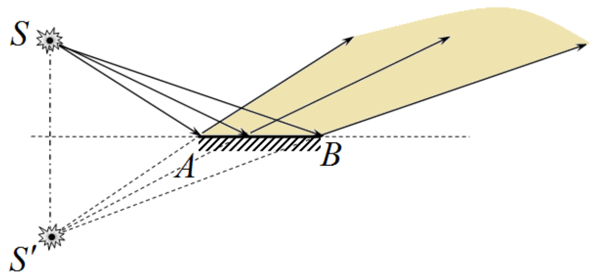
Что такое изображение в плоском зеркале?



Построить изображение точечного источника S в плоском зеркале может каждый ученик! Достаточно отобразить его зеркально и получить изображение S'. Но какой смысл имеет построенное изображение? Ведь за зеркалом света нет!

Ответ на поставленный вопрос следующий. В рамках геометрической оптики свет представляется в виде набора (семейств) лучей. Поэтому описание освещенного пространства задается описанием проходящих через него лучей. В случае точеного источника, расположенного над плоским зеркалом, освещенной частью является только верхняя часть пространства. Все лучи, проходящие через него, можно разделить на две группы: идущие непосредственно от источника S (на рис. изображены штрихпунктирными линиями) и лучи отраженные от зеркала (сплошные линии). Структура последних такова, что они как бы выходят из одной точки S', которая является изображением источника. Таким образом, смысл изображения – в представлении структуры отраженных лучей! Если расположить глаз A так, чтобы отраженные лучи попадали в его зрачок, то глаз (или фотоаппарат) сформирует изображение такое же, как и лучи реально исходящие из этого источника. И никаким способом ни глаз ни фотоаппарат не смогут определить реальный это источник, или мнимый! Важно также отметить, что продолжения всех отраженных лучей пересекаются в одной точке, поэтому, где бы ни был расположен наблюдатель, он всегда будет видеть источник S' в одном и том же месте!

Ситуация несколько осложняется, если зеркало AB имеет конечные размеры.



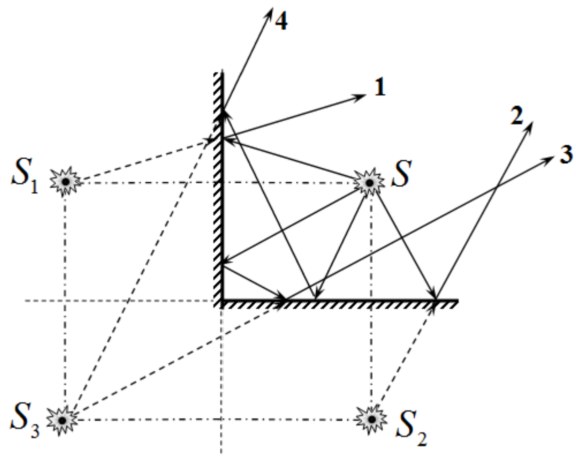
В этом случае область, в которой распространяются отраженные лучи ограничена лучами, отраженными от краев зеркала (на рис. эта область выделена заливкой). Изображение S' (которое строится по тем же правилам, что и для бесконечного зеркала) можно зафиксировать (увидеть) только в том случае, если наблюдатель находится в выделенной области. Иными словами, можно сказать, что изображение существует только в этой выделенной области.

Поразмышляйте самостоятельно, какой смысл имеют 3 изображения S_1, S_2, S_3 точки S, находящейся между двумя взаимно перпендикулярными зеркалами:

S_1 - описывает лучи 1, отраженные от первого зеркала;

S_2 - описывает лучи 2, отраженные от второго зеркала;

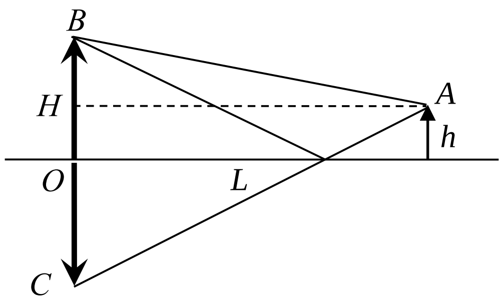
S_3 - описывает лучи 3, отраженные сначала от первого зеркала, а топом от второго; а также лучи 4 отраженные сначала от второго зеркала, потом от первого. Можно сказать, что S_3 является изображением как S_1, так и S_2.



Теперь можно привести решение второй части задачи.

2.1 **«Восход без солнца…»** Хитрый «секрет» этой фотографии заключается в том, что фотограф в лодке имеет … некоторый рост. Это обстоятельство приводит к тому, что точка съёмки не находится на поверхности воды (плоскости отражения света). Следовательно, строго говоря, прямой вид восхода солнца и его отражение в озере не являются симметричными, т.е. имеют определенные различия. Удача фотокадра (возможно и «случайная»!) заключается в том, что в эти различия в данном случае попало и отражение в воде восходящего солнца.

Изобразим схематически фотографа высотой h и дерево OB высотой H в виде простейшей оптической схемы, изображенной на рисунке. Как видно из схемы, если угловая высота Солнца над горизонтом больше угла BAH, то Солнце взойдет над деревьями при прямом наблюдении. Однако для наблюдения его отражения в воде требуется больший угол CAH, который при восходе светила достигается несколько позже во времени. Соответственно, в течение некоторого промежутка времени будет наблюдаться интересный эффект, попавший в удачный кадр: в воде будет отсутствовать отражение солнца …



2.2 Из построенных треугольников, получим количественное условие для данного эффекта. Пусть угловая высота солнца над горизонтом α. Тогда из чертежа можем записать условия видимости светила над деревьями

$$tg\alpha > \frac{H-h}{L} \quad . \tag{6}$$

Соответственно, для появления отражения солнца в воде, необходимо выполнение дополнительного условия

$$\tan\beta > \frac{H+h}{L} \quad . \tag{7}$$

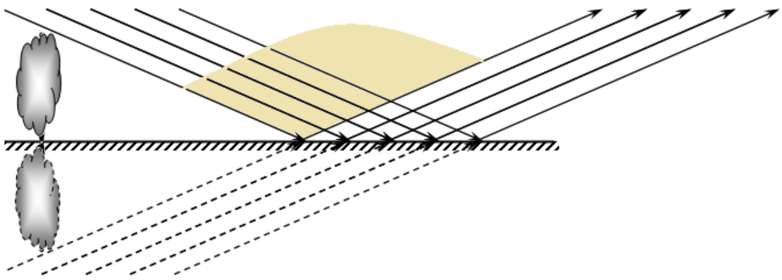
Учитывая малость углов при восходе солнца можно тангенсы углов заменить самими углами. Тогда условие наблюдения эффекта запишется в виде

$$\frac{H-h}{L} < \alpha < \frac{H+h}{L} \quad . \tag{8}$$

Теперь понятно, почему нельзя наблюдать отражение Солнца в воде – отражения верхушек деревьев, кустов в воде заслоняют его от наблюдателя. Следовательно, «секрет» исчезновения

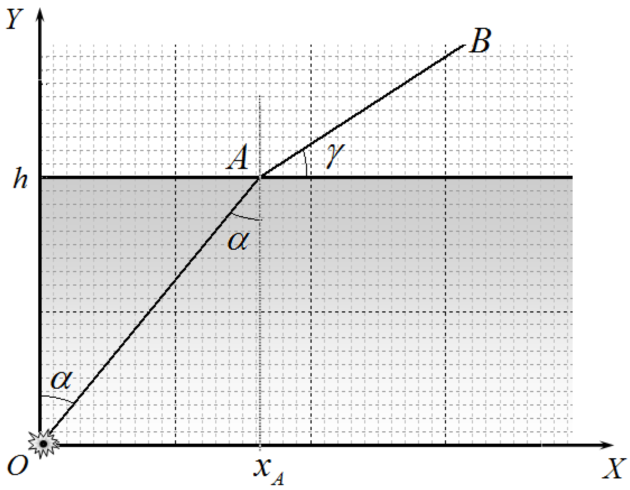
Солнца в воде прост – уровень съёмки находится выше уровня воды (на величину роста фотографа). Это и приводит к различиям видимых картинок – картинка в воде не совпадает с картинкой прямого наблюдения, как это было бы, если бы съёмка производилась строго с поверхности воды.

Приведем также еще один рисунок, на котором показаны лучи, идущие непосредственно от Солнца (заметьте, параллельные) и отраженные от поверхности воды. Заливкой выделена область, в которой должен находиться фотоаппарат, чтобы зафиксировать приведенный эффект.



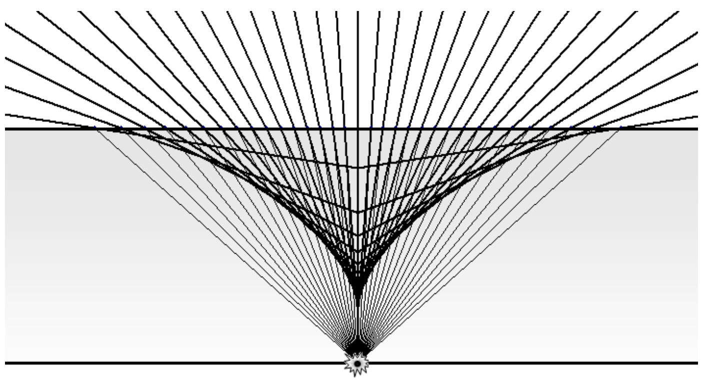
4. Всегда ли существует видимое изображение?

Заголовок третьей части задачи явно подсказывает, что в основе данного эффекта лежит преломление света на стенке аквариума.



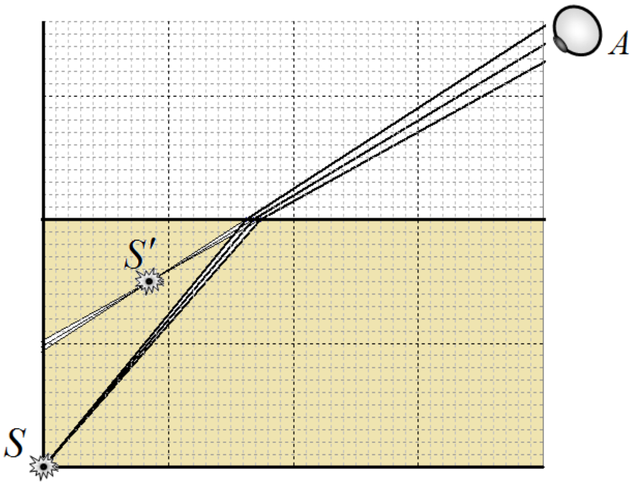
Поэтому рассмотрим традиционную задачу о построении изображения источника, лежащего на дне бассейна некоторой глубины h. Для дальнейшей формализации введем систему координат, начало отсчета которой совместим с источником. Изобразим ход произвольного луча, выходящего из источника под некоторым углом α (не обязательно малым!). После преломления в точке A от «прижмется» к поверхности воды, т.е поедет под большим углом к нормали.

Для определения положения изображения необходимо построить все лучи выходящие из источника. Результат такого построения показан на рисунке[2]. На нем также изображены продолжения лучей после преломления (жирные линии). Результат построения обескураживает – продолжения лучей не пересекаются в одной точке! Следовательно, изображения источника в строгом смысле не существует! Но, всем известно, что если смотреть на дно бассейна, то оно видно, и достаточно резко!

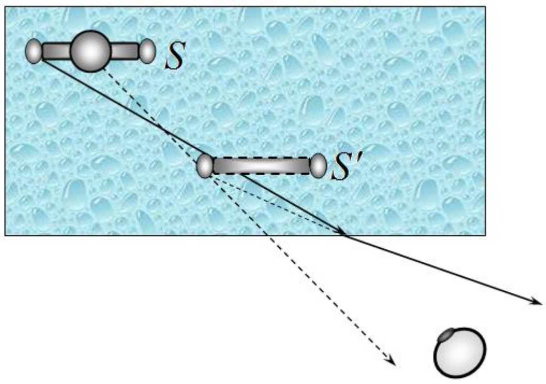


[2] Конечно, такое построение желательно выполнять точно. Приведен рисунок (как и все остальные в данной статье) построены «честно» с помощью компьютера. У участников олимпиады нет возможности использовать современные технические возможности, поэтому достаточно было нарисовать качественно ход рассматриваемых лучей!

Разрешение данного парадокса заключается в том, что размеры зрачка глаза и объектива фотоаппарата малы. Следовательно, изображение формируется узким пучком лучей, попадающих в глаз наблюдателя. Поэтому для построения изображения необходимо рассматривать только узкий пучок лучей (рис.), продолжения которых пересекаются и тем самым формируют четкое изображение. Подчеркнем – изображение формируется теми лучами, которые попадают в глаз или объектив фотоаппарата. Тем самым мы приходим к неожиданному выводу: положение изображения зависит от точки наблюдения!



При внимательном рассмотрении хода всех лучей, испущенных источником, можно понять, что его будут находиться на огибающей семейства продолжений преломленных лучей. Проведенное построение показывает, что при уменьшении угла γ (см. рис.) изображение смещается не только по вертикали, но и по горизонтали приближаясь к наблюдателю. Поэтому при фотографировании под углом к стенке аквариума можно подобрать точку наблюдения такую, что смещение изображения туловища позволило совместить неподвижное изображение головы со сдвинутым изображением руки физика (см. рис.).



5. Необходимое, но не обязательное дополнение.

Проведенные рассуждения и качественные построения дают ответы на поставленные в условии задачи вопросы. Но, настало время «проверить алгеброй… геометрию». Иными словами, показать, как можно формализовать и перевести на язык строгих алгебраических формул приближенные геометрические построения.

Итак, основная идея определения положения изображения – поиск точки пересечения близких лучей. Каждый луч, попадающий в глаз (или объектив) является отрезком прямой, поэтому может быть описан в декартовой системе координат общим уравнением

$$y = ax + b. \tag{9}$$

При рассмотрении семейства лучей (например, выходящих из одной точки) коэффициенты a, b уравнения луча (1) являются функцией некоторого параметра K. Для вычисления координат точки пересечения двух бесконечно близких лучей одного семейства (x^*, y^*) следует решить систему уравнений, описывающих эти лучи:

$$\begin{aligned} y^* &= a(K)x^* + b(K) \\ y^* &= a(K+\Delta K)x^* + b(K+\Delta K) \end{aligned} \tag{10}$$

Вычтем из второго уравнения первое, разделим получившееся уравнение на ΔK и перейдем к пределу $\Delta K \to 0$, в результате получим уравнение

$$\frac{da}{dK}x^{*}+\frac{db}{dK}=0 \qquad (11)$$

Из которого находится одна из координат точки пересечения

$$x^{*}=-\frac{b'_K}{a'_K}. \qquad (12)$$

Здесь a'_K, b'_K - производные от коэффициентов линейной зависимости (9) по параметру K. Применим описанную общую схему к задаче определения координат изображений точки при преломлении на плоской поверхности (см. рис.).

В качестве переменного параметра K, определяющего семейство преломленных лучей можно использовать любой из углов, показанных на рисунке, любую тригонометрическую функцию от этих углов, координату точки преломления x_A и т.д. Выбор дело вкуса, или опыта решения подобных задач. Мы в качестве такого параметра выберем тангенс угла наклона преломленного угла к преломляющей плоской поверхности

$$tg\,\gamma=K. \qquad (13)$$

Отметим, что этот угол определяет направление на точку наблюдения. Теперь нам необходимо записать уравнение преломленного луча, выразив коэффициенты этого уравнения через введенный параметр. Для этого запишем закон преломления

$$n\sin\alpha=\cos\gamma. \qquad (14)$$

Далее найдем координаты точки преломления выбранного луча

$$\begin{aligned} x_A&=h\,tg\,\alpha \\ y_A&=h \end{aligned}. \qquad (15)$$

Для вычисления тангенса угла наклона луча можно провести следующие преобразования

$$\begin{aligned} tg\,\alpha&=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{\cos\gamma}{n\sqrt{1-\frac{\cos^2\gamma}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{\cos^2\gamma}-1}}= \\ &=\frac{1}{\sqrt{n^2\left(1+tg^2\alpha\right)-1}}=\frac{1}{\sqrt{n^2K^2+\left(n^2-1\right)}} \end{aligned}. \qquad (16)$$

После чего находим

$$x_A=h\,tg\,\alpha=\frac{h}{\sqrt{n^2K^2+\left(n^2-1\right)}}. \qquad (17)$$

Таким образом, уравнение семейство преломленных лучей описывается уравнением

$$y=h+K\left(x-x_A\right)=Kx+h\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^2K^2+\left(n^2-1\right)}}\right). \qquad (18)$$

Далее, в соответствии с общей методикой определения координат точки пересечения близких лучей, найдем ее горизонтальную координату

$$x^{*}=-h\frac{d}{dK}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^2K^2+\left(n^2-1\right)}}\right)=h\frac{n^2-1}{\left(n^2K^2+\left(n^2-1\right)\right)^{3/2}}. \qquad (19)$$

Подставляя полученное значение в уравнение луча (18), получим вторую координату точки пересечения

$$y^{*}=-h\frac{d}{dK}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^2K^2+\left(n^2-1\right)}}\right)=h-h\frac{n^2K^3}{\left(n^2K^2+\left(n^2-1\right)\right)^{3/2}}. \qquad (20)$$

Отметим, что при взгляде «сверху» (этому соответствует предел $K \to \infty$) координаты точки-изображения стремятся к следующим значениям

$$x^* \to 0, \quad y^* \to h - \frac{h}{n}, \tag{21}$$

Что соответствует известному результату: кажущаяся глубина водоема в n раз меньше истинной глубины.

Вот такая «красивая» алгебра обосновывает проведенные ранее геометрические построения. Признаемся, приведенные в последней части рисунки построены в соответствии с полученными алгебраическими результатами.