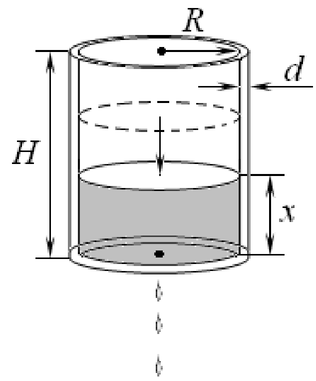
Задача 10 - 2. Утечка … центра масс



Часть 1. «Сложный» график

1.4 Удобно решать задачу в «обратном» порядке, рассматривая медленный подъём жидкости в сосуде от нуля до некоторого уровня x. При таком подходе сразу понятно, что начальная точка ($x = 0$) *Графика 1* – это и есть искомая высота h_1 центра масс пустого сосуда, поскольку воды в сосуде ещё пока нет

$$h_1 = 10 \text{ см} = 1{,}0 \text{ дм} \quad . \qquad (1)$$

Далее заметим, что при максимальной высоте уровня $x = 20$ см воды в сосуде центр масс системы вновь находится на высоте h_1 от дна. Это вполне возможно, поскольку центр масс воды лежит на половине её высоты. Следовательно, искомая начальная высота

$$h_0 = 2h_1 = 20 \text{ см} = 2{,}0 \text{ дм} \quad . \qquad (2)$$

1.5 Если уровень воды в сосуде находится на высоте x от дна, то масса воды, находящейся в сосуде, равна

$$m_2 = \rho V = \rho S x = \rho \pi R^2 x \ , \qquad (3)$$

а её центр масс, соответственно, находится на высоте $\frac{x}{2}$ от дна.

Если центр масс сосуда (без воды) массой m_1 находится на известной высоте h_1 от дна, то, согласно подсказке, в данный момент времени центр масс системы будет находиться между центрами масс воды и сосуда на высоте

$$h(x) = \frac{m_1 h_1 + m_2 \left(\frac{x}{2}\right)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 h_1 + \rho\pi R^2 x \left(\frac{x}{2}\right)}{m_1 + \rho\pi R^2 x} = \frac{2m_1 h_1 + \rho\pi R^2 x^2}{[\![2(m]\!]_1 + \rho\pi R^2 x)} \quad . \qquad (4)$$

Выберем несколько «удобных» точек на *Графике 1*, когда функция «на глаз» проходит через узлы координатной сетки, минимум и т.д. Это, например, точки с координатами $(0{,}3;\ 0{,}6)$, $(0{,}55;\ 0{,}55)$, $(0{,}9;\ 0{,}6)$, $(1{,}5;\ 0{,}8)$ и т.д.

Из (4) выразим искомую массу m_1 пустого сосуда через координаты $(x\ ;\ h)$ выбранной точки на *Графике 1*

$$m_1 = \rho\pi R^2 \frac{2h - x}{2(h_1 - h)} x \quad . \qquad (5)$$

Используя (5), несложно вычислить массу m_1 сосуда без воды для каждой из выбранных нами на *Графике 1* точек. Результаты вычислений (до трёх значащих цифр, с учётом запасной цифры) занесём в таблицу

Точка	m_1, кг
$(0{,}3;\ 0{,}6)$	0,265
$(0{,}55;\ 0{,}55)$	0,264
$(0{,}9;\ 0{,}6)$	0,265
$(1{,}5;\ 0{,}8)$	0,294

Как следует из таблицы, последняя точка значительно «вываливается» из численного диапазона первых трёх точек. Такие точки называются «промахами» и могут быть опущены при дальнейших расчётах. Если уж совсем внимательно присмотреться, то можно заметить, что эта «проблемная» точка $(1{,}5;\ 0{,}8)$ действительно лежит несколько ниже узла координатной сетки.

Усредняя первые три результата, и округляя вычисление до двух значащих цифр (как в условии), получаем окончательный ответ

$$m_1 = 0{,}2647 \text{ кг} \approx 0{,}26 \text{ кг} \qquad (6)$$

Для удобства анализа полученной функции и вычислений m_1 введём безразмерные переменные для высоты центра масс системы $h^* = \frac{h}{h_1}$ и высоты жидкости в сосуде $x^* = \frac{x}{h_1}$ (т.е. будем измерять их в величинах «h_1»). Тогда зависимость (4) можно переписать в виде

$$h^*(x^*) = \frac{2 + A \cdot (x^*)^2}{2(1 + A \cdot x^*)} = \quad , \tag{7}$$

где остался единственный безразмерный параметр зависимости

$$A = \frac{\rho S h_1}{m_1} = \frac{\rho \pi R^2 h_1}{m_1} \quad . \tag{8}$$

По данным таблицы в нашем случае значение параметра

$$A = \frac{\rho \pi R^2 h_1}{m_1} = 3{,}02 \quad . \tag{9}$$

Интересно, что если подставить в (4) значения $x = 0$ и $h(x) = h_1$, то мы придём к значениям (1) и (2).

1.6 Для нахождения минимума функции (4) (или (7)) заметим, что при повышении уровня воды в сосуде на начальном этапе ($x < h(x)$) каждый следующий небольшой слой воды массой Δm_i (Рис. 1, а) немного понижает положение центра масс системы, поскольку он находится ниже его.

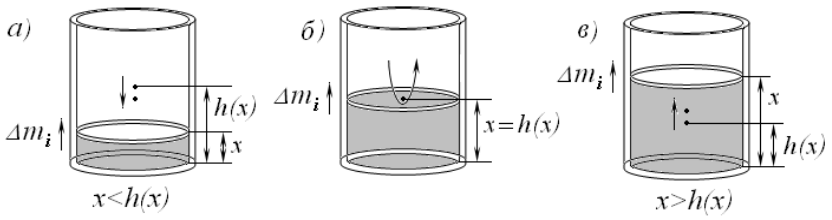
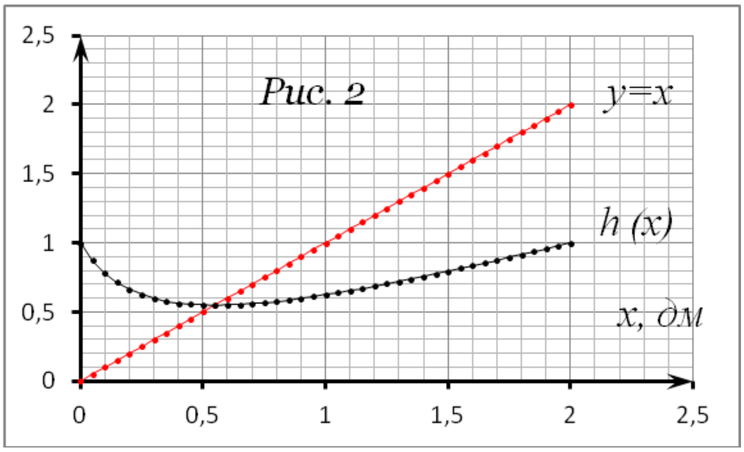


Рис. 1

Так будет продолжаться до тех пор, пока уровень жидкости x не достигнет высоты $x = h(x)$ центра масс системы (Рис. 1, б). Далее ($x > h(x)$) уже каждый следующий слой воды будет приподнимать положение центра масс системы (Рис. 1,в).

Следовательно, при прохождении минимума функции $h(x)$ на *Графике 1* уровень воды x_1 должен совпадать с центром масс системы (ордината графика равна его абсциссе).



Для подтверждения справедливости этого вывода удобно построить (от школьников не требуется!) на одной координатной сетке (Рис. 2) графики зависимостей уровня $y = x$ воды в сосуде и высоты центра масс системы $h(x)$ от дна сосуда. Как следует из построения, график зависимости $y = x$ действительно пересекает график зависимости $h(x)$ «снизу вверх» в точке минимума.

Согласно (4) при этом можем записать

$$h(x) = x_1 = \frac{2 m_1 h_1 + \rho \pi R^2 x_1^2}{[\![2(m]\!]_1 + \rho \pi R^2 x_1)} \;, \tag{10}$$

откуда получаем квадратное уравнение относительно x_1

$$\rho \pi R^2 x_1^2 + 2 m_1 x_1 - 2 m_1 h_1 = 0 \quad . \tag{11}$$

Отбрасывая отрицательный корень, как не имеющий физического смысла, получаем искомое значение

$$x_1 = \frac{\sqrt{m_1^2 + 2m_1\rho\pi R^2 h_1} - m_1}{\rho\pi R^2}. \qquad (12)$$

Подчеркнём, что для нахождения минимума функции (4) (или (7)) можно также использовать и традиционный подход: вычислить производную и приравнять её к нулю. Убедитесь самостоятельно, что при этом Вы получите уравнение (11), и в итоге – такой же результат (12).

Интересно, что согласно полученным данным устойчивость сосуда с водой, которая определяется высотой центра масс, по мере вытекания воды сначала увеличивается, а потом уменьшается. Данный эффект можно наблюдать на тубах с зубной пастой, которые по мере расхода пасты, бывает сложно поставить вертикально.

1.7 Находя из *Графика 1* абсциссу минимума функции $x_1 = 0{,}55$ **дм**, выразим из (12) массу m_1 сосуда вторым способом

$$m_1 = \frac{\rho\pi R^2}{2(h_1 - x_1)} x_1^2 = 0{,}2638 \text{ кг} \approx 0{,}26 \text{ кг}. \qquad (13)$$

Для сравнения этого метода определения массы с методом из предыдущего пункта, находим относительную погрешность определения массы сосуда

$$\varepsilon = \frac{\Delta m_1}{m_1} = 0{,}3\ \%, \qquad (14)$$

что является отличным результатом для обработки графика «народным» методом «на глаз».

После завершения всех расчётов данной части задачи можно признаться (☺), что построение *Графика 1* проводилось при значении безразмерного параметра

$$A = \frac{\rho\pi R^2 h_1}{m_1} = 3{,}00. \qquad (15)$$

Приятно, что мы с хорошей точностью смогли вычислить этот параметр (см. (9)), обрабатывая представленный в условии график.

Часть 2. «Простой» сосуд

2.1 Поскольку стенки и дно сосуда имеют одинаковую толщину $d (d \ll R)$, то массу m_3 дна сосуда выразим как

$$m_3 = \rho_1 V = \rho_1 S_3 d = \rho_1 d\pi R^2, \qquad (16)$$

где $S_3 = \pi R^2$ – площадь дна сосуда. Соответственно, массу стенок найдем как

$$m_4 = \rho_1 d S_4 = \rho_1 d 2\pi R H, \qquad (17)$$

где H – искомая высота сосуда.

Так как центр масс сосуда без воды (Рис. 3) находиться на высоте h_1 от дна (см. (1)), то справедливо равенство (толщиной дна здесь пренебрегаем)

$$h_1 = \frac{m_3 \cdot 0 + m_4\left(\frac{H}{2}\right)}{m_3 + m_4} = \frac{\rho_1 d 2\pi R H \left(\frac{H}{2}\right)}{\rho_1 d\pi R^2 + \rho_1 d 2\pi R H} = \frac{H^2}{R + 2H}. \qquad (18)$$

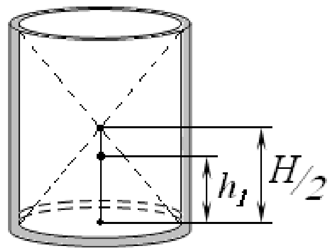


Рис. 3

Из (18) находим

$$H^2 - 2h_1 H - h_1 R = 0 \qquad (19)$$

Откуда

$$H = h_1\left(1 + \sqrt{1 + \frac{R}{h_1}}\right) = 22 \text{ см}. \qquad (20)$$

2.2 Для определения толщины стенок сосуда воспользуемся тем, что мы уже вычислили его массу (см. (13)), тогда

$$m_1 = \frac{\rho\pi R^2}{2(h_1 - x_1)}x_1^2 = m_3 + m_4 = \rho_2 d\pi R^2 + \rho_2 d2\pi RH = \rho_2 d\pi R(R + 2H), \qquad (21)$$

откуда находим

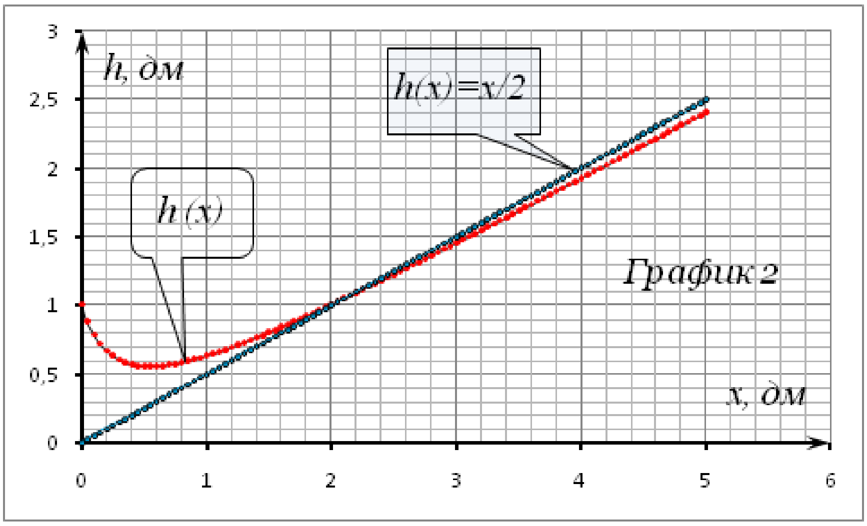
$$d = \frac{m_1}{\rho_2\pi R(R + 2H)} = 2{,}1\ \text{мм}. \qquad (22)$$

Часть 3. Наливаем обратно …

3.1 Для решения данного пункта достаточно заметить, что при больших $x\ (x \to \infty)$ масса $m_2 = \rho V = \rho\pi R^2 x$ воды в сосуде будет значительно превышать массу самого сосуда. Это значит, что положение центра масс системы практически будет совпадать с положением центра масс столба воды, т.е. находиться на половине его высоты.

Иными словами, в данном интервале функция будет стремиться к зависимости

$$h(x) \approx \frac{x}{2}, \qquad (23)$$



оставаясь немного ниже ее, т.к. масса сосуда всё же отлична от нуля. На всякий случай, используя ((4) или (7)) можно просчитать несколько точек, чтобы убедиться в справедливости приближения (23)

x, дм	$h(x) = \dfrac{2m_1h_1 + \rho\pi R^2x^2}{2(m_1 + \rho\pi R^2x)}$	$h(x) = \dfrac{x}{2}$	ε, (%)
2,0	1,00	1,00	0,0
2,5	1,22	1,25	2,4
3,0	1,45	1,50	3,3
3,5	1,68	1,75	4,0
4,0	1,92	2,00	4,0
4,5	2,16	2,25	4,0
5,0	2,41	2,50	3,6

Как следует из таблицы, эти графики на указанном интервале с приемлемой точностью «совпадают» друг с другом. На *Графике 2* (на всякий случай!) приведено точное построение (от школьников не требуется), из которого видно, что в данной части задачи действительно вполне достаточно догадаться пренебречь массой сосуда и записать (и построить!) функцию $h(x) \approx \frac{x}{2}$ (можно несколько «ниже» точного значения).