Задача 10 - 3. «Мягкая» пружина

Задача 10-3.

1.1.
Длина всей цепочки, подвешенной вертикально

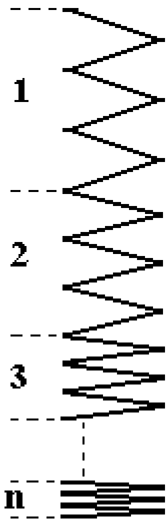

Рисунок 1.

$$l' = nl_1 + \Delta x \quad (1).$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_1 + \dots + \Delta x_{n-1} (2),$$

где, Δx - удлинение всей цепочки.
Δx_1, Δx_2, … Δx_{n-1} - удлинения первого, второго … (n-1)-го звеньев, считая сверху.

Верхнее первое звено будет деформироваться под действием веса нижних $(n-1)$ звеньев. Условие равновесия для них имеет вид:

$$k_1 \Delta x_1 = (n-1) m_1 g \quad (3).$$

Условие равновесия для нижних $(n-2)$ звеньев –

$$k_1 \Delta x_2 = (n-2) m_1 g \quad (4),$$

для $(n-i)$звеньев –

$$k_1 \Delta x_i = (n-i) m_1 g \quad (5),$$

для нижнего n-го звена –

$$k_1 \Delta x_{n-1} = m_1 g \quad (6).$$

Нижнее n-ое звено не деформируется.
Подставляя уравнения (3), (4), (5), (6), в (2) получим:

$$\Delta x = \frac{m_1 g}{k_1}(1 + 2 + \dots + n - 1) (7).$$

$(1 + 2 + \dots + n - 1)$– сумма $(n-1)$ первых членов арифметической прогрессии

$$(1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{1 + n - 1}{2}(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} (8).$$

$$\Delta x = \frac{m_1 g n(n-1)}{2k_1} (9).$$

$$l' = 10 \cdot 5{,}00\text{см} + 4{,}50\text{см} = \mathbf{54{,}5}\text{см}.$$

1.2.Согласно условию

$$\Delta x = nl_1 \quad (10).$$

Подставляя (10) в (9) получим:

$$nl_1 = \frac{m_1 g n(n-1)}{2k_1} (11).$$

Откуда

2.1.

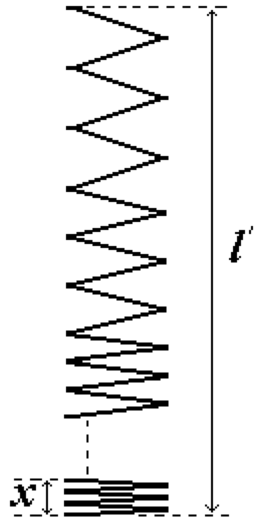

Рисунок 2.

Выберем снизу пружины участок длиной x растяжением под действием собственного веса, которого можно пренебречь. Тогда недеформированную пружину длиной l можно рассматривать как $\frac{l}{x} = n$ пружин соединённых последовательно, жёсткость каждой из которых равна

$$k_1 = nk \quad (13).$$

Деформацию первого сверху участка длиной x можно найти из условия равновесия оставшейся нижней части пружины (рис.3).

$$(m - m_1)g = k_1 \Delta x_1 (14).$$

$m_1 = \frac{x}{l} m \quad (15)$ - масса участка пружины длиной x .

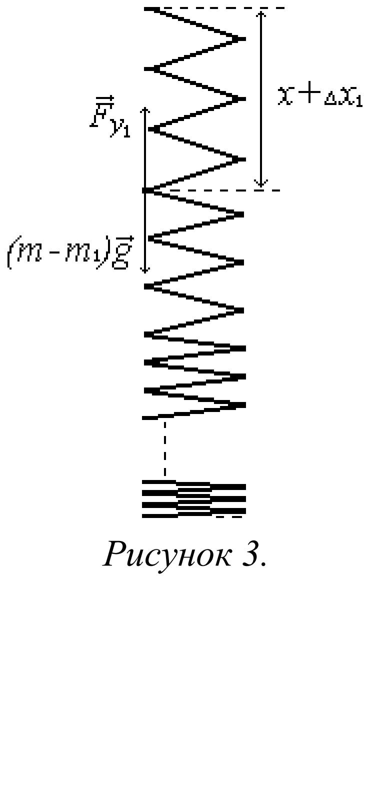

Рисунок 3.

Учитывая (13) и (15), уравнение (14) примет вид:

$$\left(m - \frac{x}{l} m\right) g = nk\Delta x_1 (16).$$

Учитывая, что $\frac{l}{x} = n$ получим:

$$\left(m - \frac{1}{n} m\right) g = nk\Delta x_1 (17).$$

Откуда

$$\Delta x_1 = \frac{(n-1)mg}{n^2 k} (18).$$

Деформация второго сверху участка находится аналогично:

$$(m - 2m_1)g = k_1 \Delta x_2 (19).$$

$$\left(m - \frac{2x}{l} m\right) g = nk\Delta x_2 (20).$$

$$\left(m - \frac{2}{n} m\right) g = nk\Delta x_2 (21).$$

$\Delta x_2 = \dfrac{(n-2)mg}{n^2k}$ (22).

Для i-го участка

$\Delta x_i = \dfrac{(n-i)mg}{n^2k}$ (23).

Учитывая, что

$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_1 + \cdots + \Delta x_{n-1}$ (2).

получим

$\Delta x = \dfrac{mg}{n^2k}(1 + 2 + \cdots + n - 1) = \dfrac{mg(n-1)}{2nk}$ (24).

При $n \to \infty$, дробь $\dfrac{(n-1)}{n} = 1$, тогда

$\boldsymbol{\Delta x = \dfrac{mg}{2k}}$ (25).

2.2. Так как по условию задачи $\Delta x = l$, то из (25) получим:

$l = \dfrac{mg}{2k}$ (26).

Откуда

$\boldsymbol{k = \dfrac{mg}{2l}}$ (27).

3.1. При равномерном движении пружины по горизонтальной поверхности внешняя сила F равна силе трения действующей на пружину со стороны поверхности

Выберем возле свободного конца пружины участок длиной x , деформацией которого можно пренебречь. Тогда недеформированную пружину длиной l можно рассматривать как $\dfrac{l}{x} = n$ пружин соединённых последовательно, жёсткость каждой из которых равна

$k_1 = nk$ (13).

Для -ой части пружины длиной x , находящейся слева, справедливо уравнение:

$nk\Delta x_{n-1} = \mu \dfrac{x}{l} mg$ (29).

Для -ой и $(n-1)$-ой части пружины справедливо уравнение:

$nk\Delta x_{n-2} = \mu \dfrac{2x}{l} mg$ (30).

Для i частей пружины, находящихся слева

$nk\Delta x_{n-i} = \mu \dfrac{ix}{l} mg$ (31).

Для $(n-2)$ частей пружины, находящихся слева

$$nk\Delta x_2 = \mu\frac{(n-2)x}{l}mg(32).$$

Для $(n-1)$ частей пружины, находящихся слева

$$nk\Delta x_1 = \mu\frac{(n-1)x}{l}mg(33).$$

Для деформаций получим:

$$\Delta x_{n-1} = \frac{\mu mg}{kn^2}(34).$$

$$\Delta x_{n-2} = \frac{2\mu mg}{kn^2}(35).$$

$$\Delta x_{n-i} = \frac{i\mu mg}{kn^2}(36).$$

$$\Delta x_2 = \frac{(n-2)\mu mg}{kn^2}(38).$$

$$\Delta x_1 = \frac{(n-1)\mu mg}{kn^2}(39).$$

Просуммировав деформации получим:

$$\Delta x = \frac{\mu mg(n-1)}{2nk}(40).$$

При $n \to \infty$, дробь $\frac{(n-1)}{n} = 1$, тогда

$$\boldsymbol{\Delta x = \frac{\mu mg}{2k}(41).}$$

3.2. Рассуждая аналогично п.3.1., из второго закона Ньютона для -ой части пружины, n -ой и $(n-1)$-ой части, i частей пружины, находящихся слеваи.т.д. для деформаций получим:

$$\Delta x_{n-1} = \frac{m(\mu g + a)}{kn^2}(42).$$

$$\Delta x_{n-2} = \frac{2m(\mu g + a)}{kn^2}(43).$$

$$\Delta x_{n-i} = \frac{im(\mu g + a)}{kn^2}(44).$$

$$\Delta x_2 = \frac{(n-2)m(\mu g + a)}{kn^2}(45).$$

$$\Delta x_1 = \frac{(n-1)m(\mu g + a)}{kn^2}(46).$$

Просуммировав деформации получим:

$$\Delta x = \frac{m(\mu g + a)(n-1)}{2nk} (47).$$

При $n \to \infty$, дробь $\frac{(n-1)}{n} = 1$, тогда

$$\Delta x = \frac{m(\mu g + a)}{2k} (48).$$

3.3. Так как по условию задачи $\Delta x = l$, то из (25) получим:

$$l = \frac{m(\mu g + a)}{2k} (49),$$

Откуда

$$a = \frac{2kl - \mu mg}{m} (50).$$

Из второго закона Ньютона, записанного для всей пружины, получим:

$$F = ma + \mu mg \qquad (51).$$

Подставляя (50) в (51), получим:

$$\boldsymbol{F = 2kl} \qquad (52).$$