Задача 9-2. Велокомпьютер

Часть 1. «Эволюция» средней скорости

1.1 Согласно определению средней скорости можем записать

. (1)

Далее учтём условие малости промежутков $\Delta S \ll S$ и $\Delta t \ll t$ и примечание в условии задачи

$$\frac{S}{t+\Delta t} = \frac{S}{t\left(1+\frac{\Delta t}{t}\right)} \approx \frac{S}{t}\left(1-\frac{\Delta t}{t}\right) = \frac{S}{t} - \frac{S\Delta t}{t^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\Delta S}{t+\Delta t} \approx \frac{\Delta S}{t}. \quad (3)$$

С учётом последних равенств (1) можно переписать в виде

. (4)

Как следует из (4), изменение (приращение) средней скорости велосипедиста можно записать как

. (5)

Из (5) находим искомые выражения для коэффициентов A и B

$$A = \frac{1}{t}, \quad B = -\frac{S}{t^2}. \quad (6)$$

Используя (6) найдём размерности полученных коэффициентов

. (7)

1.2 Расчёт даёт отрицательное значение для изменения средней скорости велосипедиста на рассматриваемом малом участке дистанции (т.е. его средняя скорость при этом уменьшается)

. (8)

1.3 Если значение средней скорости велосипедиста на некотором малом участке дистанции постоянно, то понятно, что его изменение (приращение) равно нулю. Тогда, согласно (5), имеем

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S}{t}. \quad (9)$$

Условие (9) можно сформулировать следующим образом: если средняя скорость $\left(S/t\right)$ движения велосипедиста на данном малом участке дистанции не изменяется, то он «удачно» едет с мгновенной скоростью $\left(\frac{\Delta S}{\Delta t} = \upsilon(t)\right)$, равной средней. Соответственно, если мгновенная скорость $\upsilon(t)$ больше средней), то средняя скорость будет расти, а если $\upsilon(t)$ меньше средней $\left(\frac{\Delta S}{\Delta t} < \frac{S}{t}\right)$ – то убывать.

Часть 2. «Странная» гонка

2.1 Построим график зависимости мгновенной скорости $\upsilon(t)$ велосипедиста от времени в течение гонки (рис. 1). Поскольку ускорение движения велосипедиста постоянно, то его мгновенная скорость линейно возрастает на первой половине дистанции (времени), достигая максимального значения на середине дистанции $S_1 = 0{,}50$ км через промежуток времени $t_0 = \sqrt{S/a} = 45$ с, а далее – также линейно убывает. При этом, как следует из (9), даже на второй половине дистанции средняя скорость велосипедиста продолжает расти некоторое время t, несмотря на то, что мгновенная скорость уже убывает. Действительно, до тех пор, пока его мгновенная скорость $\upsilon(t)$ будет больше средней на всей дистанции приращение будет положительно.

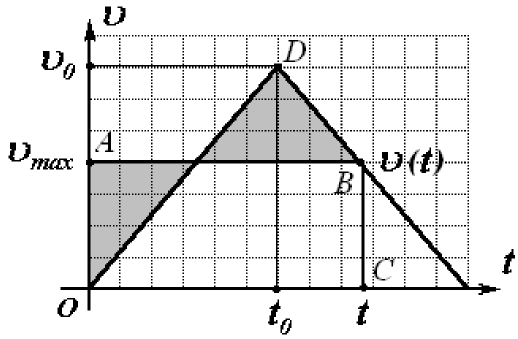


Рис. 1

2.2 На участке *OD* (см. рис. 1), где средняя скорость равна половине мгновенной скорости, поскольку движение велосипедиста является равноускоренным. Следовательно, здесь

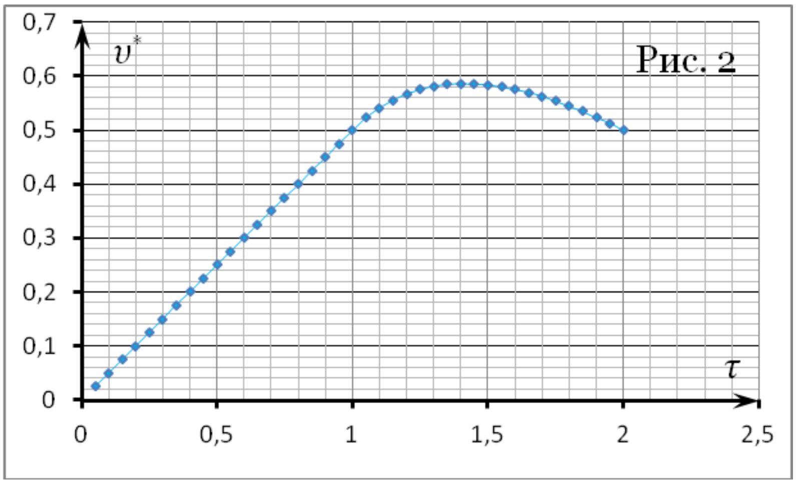
, (10)

т.е. искомая зависимость представляет собой прямую, выходящую из начала координат.

Далее ($t_0 < t < 2t_0$) мгновенная скорость начинает убывать, поэтому для нахождения средней скорости необходимо найти весь путь (площадь фигуры *ODBC* на рис. 1) и разделить его на все время движения велосипедиста. При этом получим зависимость

. (11)

График полученной зависимости (11) для , построенный по точкам (для удобства в безразмерных координатах $\upsilon^* = \dfrac{\upsilon}{\upsilon_0}$ и $\tau = \dfrac{t}{t_0}$) приведен на рисунке 2 (построение этого графика на отдельном бланке от школьников не требуется).



На участке от нуля до единицы график линейно растет до значения 0,5, затем испытывает максимум и к концу дистанции, вновь приходит к значению 0,5, поскольку велосипедист на всех этапах двигался только равноускоренно.

Из графика также следует, что средняя скорость велосипедиста достигает максимума где-то на второй половине дистанции в окрестности точки $\tau \approx 1{,}4$.

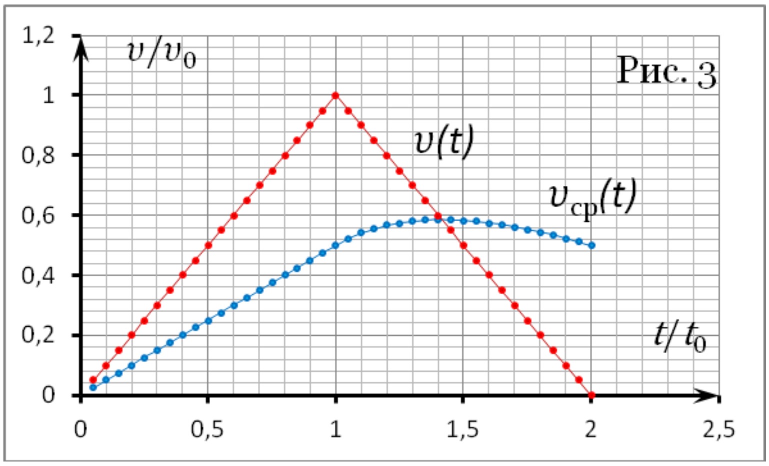
2.3 Если некоторая функция в данной точке испытывает максимум (или минимум), то в окрестностях этой точки её приращение (изменение) равно нулю. Это легко понять, прохаживаясь по вершине холма: при этом наша высота будет оставаться практически неизменной.

Но если вблизи максимума функции её приращение равно нулю, то выполняется условие (9). Следовательно, в момент, когда средняя скорость велосипедиста достигает своего максимального значения , справедливо равенство

. (12)

Иными словами, искомая максимальная средняя скорость велосипедиста должна быть равна его мгновенной скорости $\upsilon(t)$.

Это значит, что график функции $\upsilon(t)$ пересекает график функции «сверху вниз» строго в точке её максимума, что и должно получиться при правильном построении двух графиков в одной системе координат (рис. 3).



Пусть это произошло через промежуток времени t после достижения максимума мгновенной скорости велосипедиста (см. Рис. 1).

Поскольку велосипедист уже начал замедляться, то его скорость в этот момент будет равна

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 - at \,.$$

Соответственно, условие (12) можно переписать в виде

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 - at = \frac{\frac{S}{2} + \frac{\upsilon_0 + (\upsilon_0 - at)}{2} t}{t_{0+} t} = \upsilon_{\max} \,. \tag{13}$$

Из (13) получаем квадратное уравнение относительно t

$$at^2 + 2\upsilon_0 t - S = 0 \,, \tag{14}$$

которое имеет два корня. Поскольку промежуток времени t движения велосипедиста положителен, то отрицательный корень уравнения следует отбросить как не имеющий физического смысла.

Выбираем положительный корень для t

$$t = \sqrt{\frac{S}{a}} (\sqrt{2} - 1) = 0{,}41 t_0 \,. \tag{15}$$

Подставляя полученное значение для t в (13), находим максимальное значение средней скорости велосипедиста

, (16)

и расстояние от места старта, на котором оно будет зафиксировано велокомпьютером

S . (17)

2.4 Расчёт даёт значения

, (18)

$$S_2 = 2(\sqrt{2} - 1)S = 8{,}3 \cdot 10^2 \text{ м} = 0{,}83 \text{ км} \tag{19}$$

Интересно, что уравнение (14) можно получить и более простым путем, если заметить, что выделенные на Рис.1 площади должны быть одинаковы, поскольку рассматриваемые фигуры $OABC$ и $ODBC$ равновелики. Тогда

$$\Rightarrow \quad t^2 + 2t_0 t - t_0^2 = 0 \quad . \qquad (20)$$

С учётом того, что $t_0 = \sqrt{S/a}$ и $v_0 = \sqrt{aS}$, легко убеждаемся, что (20) совпадает с (14), т.е. для t получаем тот же ответ (15).

Подчеркнем, что любители дифференцировать могут также получить уравнение (14) достаточно «стандартным» путем, взяв производную от функции средней скорости

(21)

по времени t и приравняв её нулю. Используя правило дифференцирования частного функций, в результате для определения t получим уравнение

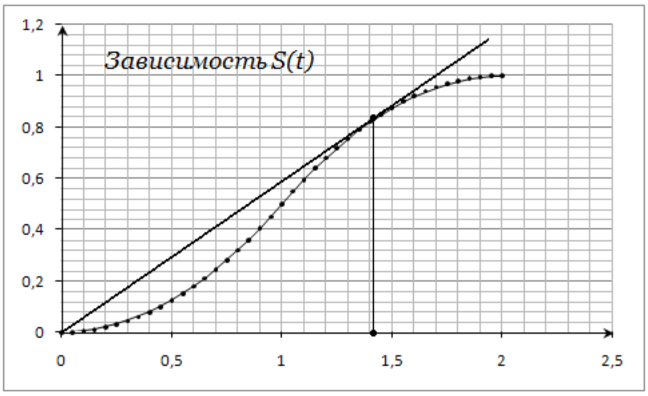
$$\frac{at^2}{2} + at_0 t - \frac{S}{2} = 0 \quad , \qquad (22)$$

которое опять же приводит нас к (14).

Как видим, все правильные способы решения, в отличие от неправильных, ведут к одному и тому же ответу.

Часть 3. Произвольный закон движения

Заметим, что условие (9) равенства средней и мгновенной скоростей велосипедиста имеет наглядный графический смысл и в координатах $x(t)$. Действительно, для примера вернемся к части 2 задачи и построим график зависимости $S(t)$ пути велосипедиста от времени.



Для этого движения он будет представлять из себя две «сшитые» параболы с различными ориентациями ветвей. При этом мгновенная скорость велосипедиста $\frac{\Delta S}{\Delta t} = v(t) = \tan\alpha$ равна угловому коэффициенту касательной в данной точке. Соответственно, средняя скорость равна угловому коэффициенту прямой, соединяющей данную точку с началом координат.

Равенство этих угловых коэффициентов в точке экстремума средней скорости означает, что касательная к графику должна проходить через начало координат. Построив такую касательную, из графика найдем приближенное значение $t \approx 1{,}4\, t_0$, что неплохо согласуется с (15).

Используя такой же метод, найдем точку максимальной средней скорости для предложенного закона движения велосипедиста. Построим касательную к графику, проходящую через начало координат – в нашем случае она единственная и дает точку максимальной средней скорости велосипедиста на всей дистанции.

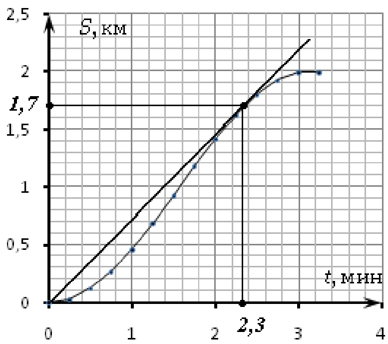


Рис. 3

Построением (Рис. 3) находим, что искомые значения с учетом погрешностей равны

$$t_з = 2{,}3 \pm 0{,}1 \text{ мин} \qquad (23)$$

$$S_з = 1{,}7 \pm 0{,}1 \text{ км} \quad . \qquad (24)$$

Следовательно, искомое значение

. (25)

Задача 9-3. Обогрев дома.