Задача 10-1. «Разминка»

Задача 1.1

Понятно, что для того чтобы вытянуть брусок, к нему следует прикладывать горизонтальную силу немного превышающую сумму сил трения, действующих на брусок

$$F = \mu(N_1 + N_0). \qquad (1)$$

Все обозначения стандартные, вертикальные силы показаны на рисунке.

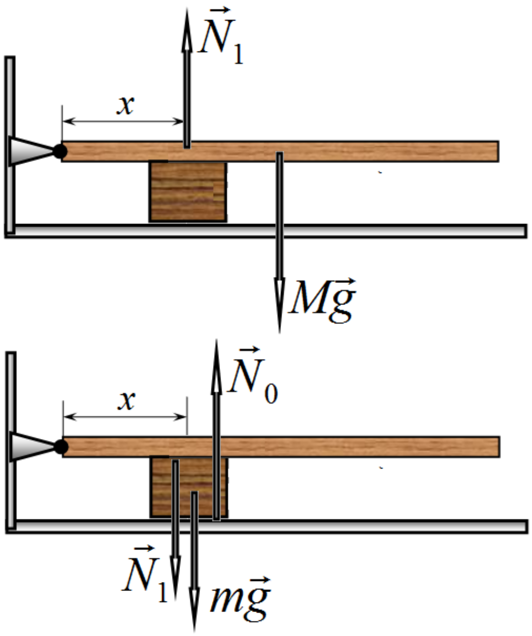
Из условия равновесия доски следует уравнение моментов

$$N_1 x = Mg\frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{Mg}{2}\frac{l}{x} \qquad (2)$$

Так как брусок в вертикальном направлении не движется, то справедливо выражение

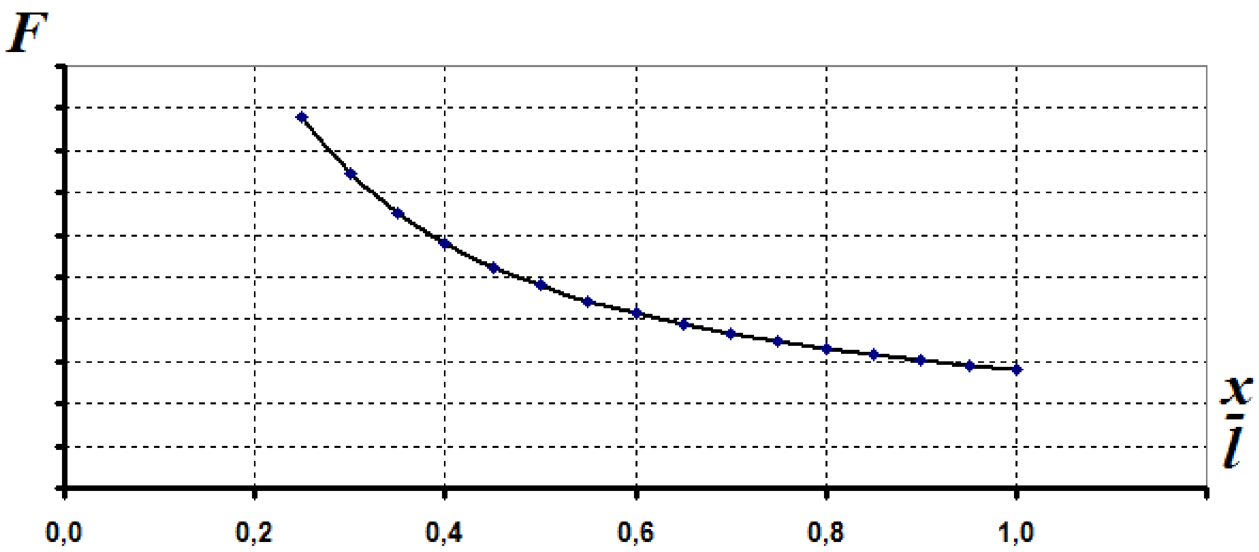
$$N_0 = mg + N_1 \qquad (3)$$

Таким образом, необходимая минимальная горизонтальная сила должна быть равна



$$F = \mu(N_1 + N_0) = \mu\left(Mg\frac{l}{x} + mg\right). \qquad (4)$$

График этой функции показа на рисунке



Работа численно равна площади под графиком данной функции. Строгое вычисление этой площади сводится к интегралу и оказывается равным:

$$A = \mu Mgl \ln 4 + \mu mgl. \qquad (5)$$

Здесь $\ln 4 \approx 1{,}4$

Однако вычисление интегралов выходит за рамки школьной программы. Поэтому для оценки эту площадь можно подсчитать численно. Такой расчет по 4 точкам (с шагом 0,25) дает выражение

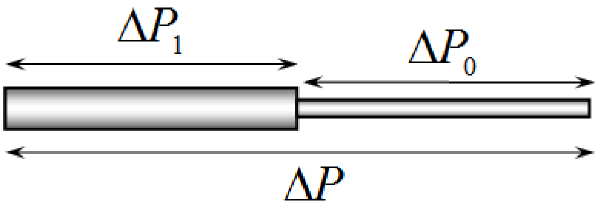
$$A = 1{,}5\mu Mgl + \mu mgl. \qquad (6)$$

Задача 1.2

1.2.1 С помощью формулы Паузейля находим

$$q_1 = \frac{(2r)^4 \Delta P}{8\pi\eta l} = 16\frac{r^4 \Delta P}{8\pi\eta l} = 16q_0 . \tag{1}$$

При соединении двух трубок необходимо учесть, что давления на концах трубок перераспределяться так, чтобы расходы газов через них были одинаковы. Обозначим разности давлений концах трубок $\Delta P_0, \Delta P_1$.



Для расходов газов из уравнения Пуазейля можно записать

$$\begin{aligned} q &= g\Delta P_0 \\ q &= 16g\Delta P_1 \; . \\ q_0 &= g\Delta P \end{aligned} \tag{2}$$

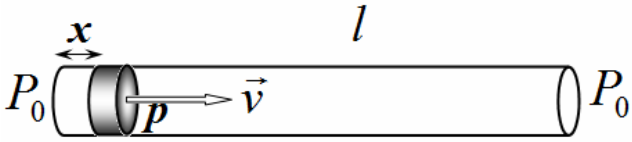
Где g - некоторая постоянная величина, q - искомый расход через составную трубку. Кроме того

$$\Delta P_0 + \Delta P_1 = \Delta P . \tag{3}$$

Из этих уравнений находим

$$\frac{q}{g} + \frac{q}{16g} = \Delta P \quad \Rightarrow \quad q = \frac{16}{17} g\Delta P = \frac{16}{17} q_0 \tag{4}$$

1.2.2 Так как труба тонкостенная и хорошо проводит тепло, а скорость движения поршня мала, то процесс можно считать изотермическим и равновесным. Т.е. при любом положении поршня распределение давления газа соответствует равновесному движению газа. В этом случае формула Пуазейля применима при любом положении поршня. Обозначим расстояние от конца трубы до поршня x, а избыточное (над атмосферным) давление вблизи поршня p.



Расход газа при движении поршня со скоростью v равен

$$q = vS . \tag{5}$$

Где S - площадь поперечного сечения трубы

Из формулы Пуазейля можно найти, какое избыточное давление может обеспечить такой расход и какую силу следует прикладывать к поршню:

$$q = vS = \frac{r^4 p}{8\pi\eta(l-x)} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{8\pi\eta S v}{r^4}(l-x) \quad \Rightarrow \quad F = pS = \frac{8\pi\eta S^2 v}{r^4}(l-x) = \frac{8\pi^3\eta v}{r^4}(l-x)$$

Так как сила изменяется по линейному закону от максимального до нулевого значения, то при вычислении работы можно взять ее среднее значение $\langle F \rangle = \frac{1}{2} F_{\max}$.

Тогда работа по выталкиванию воздуха из трубы будет равна

$$A = \langle F \rangle l = \frac{4\pi^3 \eta v}{r^4} l^2 . \tag{6}$$