Задача 10-3 Цикл Ренкина.

Часть А. Пройдемся по циклу

А1. Количество теплоты, необходимое для испарения воды массы m, находящейся при температуре кипения, определяется известным выражением:

$$Q_{1-2} = L_{100\,°C} m$$

А2. Согласно первому началу термодинамики $Q_{1\text{-}2} = A_{1\text{-}2} + \Delta U_{1\text{-}2}$. Так как кипение воды происходит при постоянном атмосферном давлении, то работу $A_{1\text{-}2}$ можно рассчитать следующим образом:

$$A_{1-2} = p_{атм}(V_2 - V_1)$$

Объем воды V_1 в жидком состоянии можно найти, зная ее плотность. Объем водяного пара V_2 можно выразить из уравнения Менделеева-Клапейрона, где химическое количество выразим через массу и молярную массу:

$$A_{1-2} = p_{атм}\left(\frac{\nu R T_{кип}}{p_{атм}} - \frac{m}{\rho_в}\right) = m\left(\frac{R T_{кип}}{M} - \frac{p_{атм}}{\rho_в}\right)$$

Тогда изменение внутренней энергии порции воды:

$$\Delta U_{1-2} = Q_{1-2} - A_{1-2} = m\left(L_{100\,°C} + \frac{p_{атм}}{\rho_в} - \frac{R T_{кип}}{M}\right)$$

А3. В этом пункте нам необходимо будет использовать выражение для внутренней энергии водяного пара. Для этого рассмотрим мысленный изохорный процесс с идеальным газом. По условию задачи нам известна молярная теплоемкость такого процесса, значит $Q_V = c_V \nu \Delta T = \frac{9}{2}\nu R \Delta T$. С другой стороны, при изохорном процессе пар не совершает работы, значит $Q_V = \Delta U$. Получаем, что изменение внутренней энергии равно $\Delta U = \frac{9}{2}\nu R\Delta T$. Зная, что при 0 К внутренняя энергия обращается в нуль, получаем выражение для внутренней энергии водяного пара:

$$U = \frac{9}{2}\nu R T$$

Процесс нагревания пара в задаче – изобарный, поэтому, воспользовавшись первым началом термодинамики и уравнением Менделеева-Клапейрона, можем получить:

$$Q_{2-3} = A_{2-3} + \Delta U_{2-3} = p_{атм}(V_3 - V_2) + \frac{9}{2}\nu R \Delta T_{2-3} = \nu R \Delta T_{2-3} + \frac{9}{2}\nu R\Delta T_{2-3} = \frac{11}{2}\nu R \Delta T_{2-3}$$

Полученный множитель $c_p = \frac{11}{2}R$ является молярной теплоемкостью водяного пара при постоянном давлении. Её можно было также получить, воспользовавшись формулой Майера: $c_p - c_V = R$. Используя молярную массу воды, получаем ответ на вопрос данного пункта:

$$Q_{2-3} = \frac{11}{2}\frac{m}{M}R(T_{max} - T_{кип})$$

А4. Как сказано в условии задачи, процесс раскручивания турбины будет происходить адиабатически. При этом будет изменяться и давление, и температура, и объем порции газа. Считая процесс квазистационарным, из условия знаем, что он подчиняется уравнению $pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = const$. Показатель адиабаты γ мы можем рассчитать, используя выражения для теплоемкостей из предыдущего пункта задачи:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \left.\frac{11}{2}R\right/\frac{9}{2}R = \frac{11}{9}$$

То есть адиабатический процесс будет происходить в соответствии с уравнением $pT^{-\frac{11}{2}} = const$. Зная давление ($p_{атм}$) и температуру ($T_{max}$) в начале процесса, можем получить зависимость давления от температуры в явном виде:

$$pT^{-\frac{11}{2}} = p_{атм} T_{max}{}^{-\frac{11}{2}} \quad \Rightarrow \quad p = p_{атм} \left(\frac{T}{T_{max}}\right)^{\frac{11}{2}}$$

Процесс будет происходить до тех пор, пока пар не начнет конденсироваться. Пар начинает конденсироваться, если его давление «попытается» превысить давление насыщенного водяного пара при текущей температуре. Тогда для нахождения конечного давления изобразим кривую зависимости $p(T)$ адиабатического процесса на графике зависимости давления насыщенных паров воды от температуры на бланке к условию задачи. Для этого рассчитаем давление в нескольких точках, не забыв, конечно, перевести температуру в абсолютную шкалу (Кельвины). Результаты расчетов представим в виде таблицы.

T, °C	50	60	70	80	90	100	110	120	130	85	87
T, K	323	333	343	353	363	373	383	393	403	358	360
p, кПа	34,3	40,6	47,8	56,0	65,3	75,8	87,7	101	116	60,5	62,3

Последние два столбца были рассчитаны для уточнения координат точки пересечения графиков.

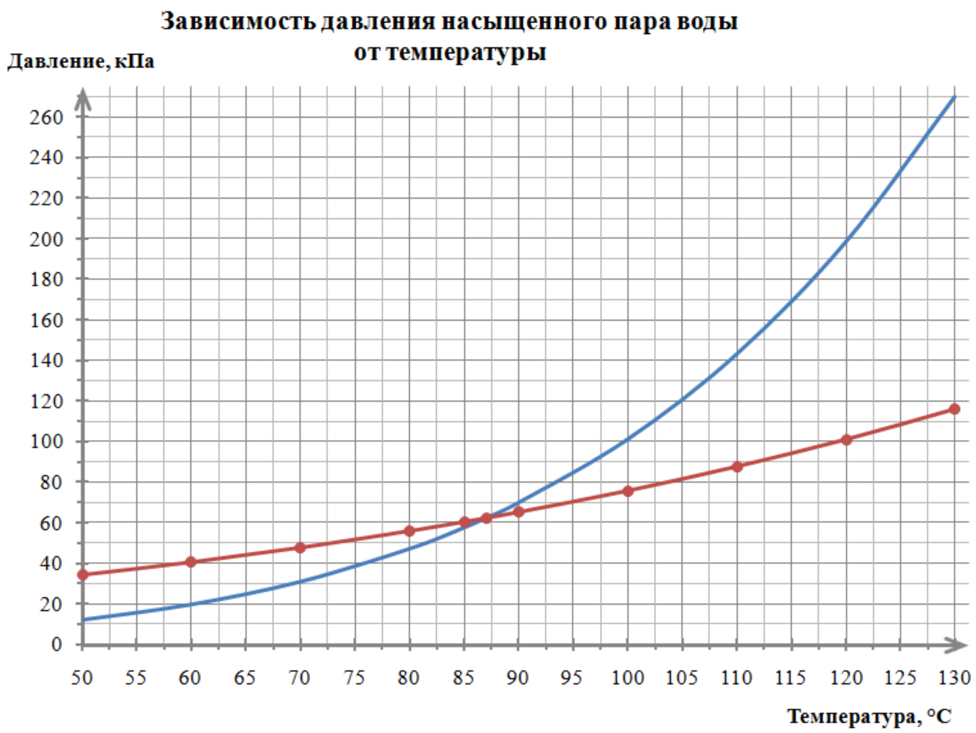

Рисунок 1 - Пересечение графиков зависимости давления от температуры

Из полученного пересечения графиков делаем вывод, что конечное давление после этапа 3-4, при котором пар начнет конденсироваться, приблизительно равно:

$$p_{конд} = 62{,}3 \text{ кПа}$$

А5. Также из графика мы получаем и температуру, при которой пар начнет и будет дальше изотермически конденсироваться:

$$T_{конд} = 87\ ^\circ\text{C} = 360 \text{ K}$$

Кроме того отметим, что поскольку, согласно условию задачи, конденсация происходит изотермически, то она происходит и изобарно в силу однозначной связи между температурой и давлением насыщенных водяных паров.

А6. В условии отмечено, что насос перекачивает воду адиабатически, то есть без передачи тепла. Кроме того, поскольку плотность воды по условию задачи постоянна, то ее объем в процессе перекачки не изменяется, что приводит к отсутствию совершаемой работы. По первому началу термодинамики из этого следует, что и внутренняя энергия воды не изменяется в процессе 5-6, то есть ее температура остается постоянной и равной $T_{конд}$. Теплоту вода получает в процессе нагревания 6-1. Количество этой теплоты можно легко рассчитать с помощью известного выражения:

$$Q_{6-1} = c_в m\Delta T = c_в m(T_{кип} - T_{конд})$$

Часть B. Исследуем цикл

B1. Схематические диаграммы в координатах *p*-*V* и *p*-*T* приведены на рисунках.

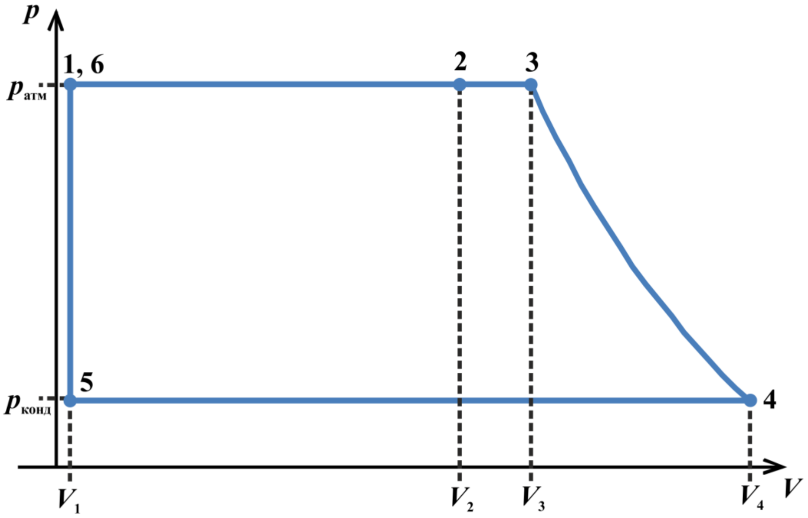

Рисунок 2 - *p*-*V* диаграмма цикла

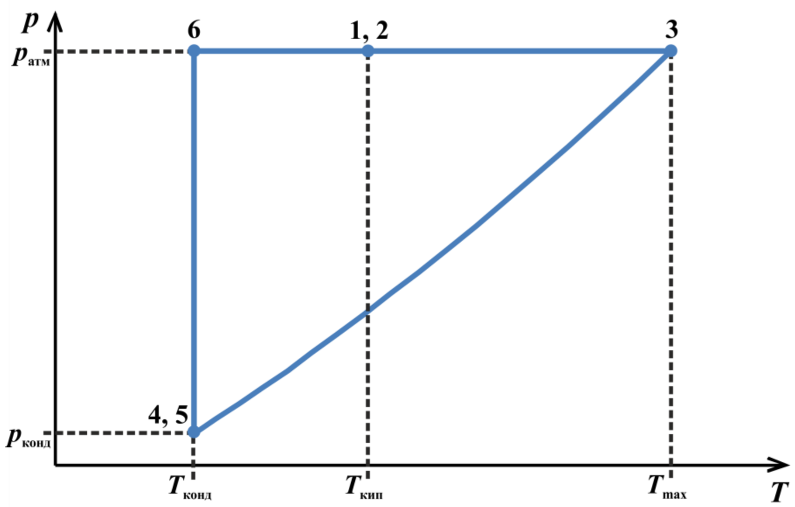

Рисунок 3 - *p*-*T* диаграмма цикла

Значения объемов на *p*-*V* диаграмме следующие:

$$V_1 = \frac{m}{\rho_в}; \quad V_2 = \frac{mRT_{кип}}{Mp_{атм}}; \quad V_3 = \frac{mRT_{max}}{Mp_{атм}}; \quad V_4 = \frac{mRT_{конд}}{Mp_{конд}}$$

Необходимо отметить, что объем V_1 значительно меньше остальных характерных объемов, так как плотность воды в жидком состоянии гораздо больше плотности пара.
На *p*-*V* диаграмме точки 1 и 6 совпадают, так как при нагревании воды в резервуаре ее давление и объем остаются постоянными. Отметим, что мы здесь пренебрегаем разницей давлений, обусловленной высотой столба жидкости. На *p*-*T* диаграмме совпадают точки 1 и 2, а также точки 4 и 5, так как при испарении и конденсации температура и давление остаются постоянными.

Участок 3-4 на обеих диаграммах относится к адиабатическому процессу и отличен от прямой в обоих случаях.

В2. Удельная теплота конденсации связана с теплотой, которую выделяет некоторая порция пара в этом процессе: $Q_{4\text{-}5} = L_{T_{\text{конд}}} m$. С другой стороны, эту теплоту можно найти, используя первое начало термодинамики:

$$-Q_{4-5} = A_{4-5} + \Delta U_{4-5}$$

Знак «минус» здесь учитывает то, что теплота отводится от пара, а не передается ему. Работу газа на участке 4-5 можно легко найти, так как давление при конденсации не изменялось:

$$A_{4-5} = p_{\text{конд}}(V_1 - V_4) = -p_{\text{конд}}\left(\frac{mRT_{\text{конд}}}{M p_{\text{конд}}} - \frac{m}{\rho_{\text{в}}}\right) = -m\left(\frac{RT_{\text{конд}}}{M} - \frac{p_{\text{конд}}}{\rho_{\text{в}}}\right)$$

Работа отрицательна, так как пар уменьшает свой объем при конденсации. Изменение внутренней энергии найдем из условия того, что она является функцией состояния, и полное изменение внутренней энергии за весь цикл равно нулю:

$$\Delta U_{1-2} + \Delta U_{2-3} + \Delta U_{3-4} + \Delta U_{4-5} + \Delta U_{5-6} + \Delta U_{6-1} = 0$$

В предыдущих частей задачи у нас имеются выражения для всех слагаемых, кроме $\Delta U_{3\text{-}4}$ и искомого $\Delta U_{4\text{-}5}$ (напомним, в части **А6** было указано, что $\Delta U_{5\text{-}6} = 0$, а $\Delta U_{6\text{-}1}$ совпадает с $Q_{6\text{-}1}$, так как вода в жидком состоянии работу не совершает). Для адиабатического процесса 3-4 с водяным паром:

$$\Delta U_{3-4} = \frac{9}{2}\nu R \Delta T_{3-4} = \frac{9}{2}\frac{m}{M}R\left(T_{\text{конд}} - T_{max}\right)$$

Тогда искомое изменение внутренней энергии равно:

$$\Delta U_{4-5} = -\Delta U_{1-2} - \Delta U_{2-3} - \Delta U_{3-4} - \Delta U_{6-1} =$$

$$= -m\left(L_{100\,^\circ\text{C}} + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho_{\text{в}}} - \frac{RT_{\text{кип}}}{M}\right) - \frac{9}{2}\frac{m}{M}R\left(T_{max} - T_{\text{кип}}\right) - \frac{9}{2}\frac{m}{M}R\left(T_{\text{конд}} - T_{max}\right) -$$

$$-c_{\text{в}} m\left(T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}}\right) = m\left(-L_{100\,^\circ\text{C}} - \frac{p_{\text{атм}}}{\rho_{\text{в}}} + \frac{RT_{\text{кип}}}{M} - \left(T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}}\right)\left(c_{\text{в}} - \frac{9}{2}\frac{R}{M}\right)\right)$$

Наконец, подставляя полученные результаты для работы и изменения внутренней энергии в первое начало термодинамики, получаем:

$$-L_{T_{\text{конд}}} m =$$

$$= -m\left(\frac{RT_{\text{конд}}}{M} - \frac{p_{\text{конд}}}{\rho_{\text{в}}}\right) + m\left(-L_{100\,^\circ\text{C}} - \frac{p_{\text{атм}}}{\rho_{\text{в}}} + \frac{RT_{\text{кип}}}{M} - \left(T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}}\right)\left(c_{\text{в}} - \frac{9}{2}\frac{R}{M}\right)\right)$$

Сокращая массу и приводя подобные слагаемые, получаем выражение для искомой удельной теплоты конденсации:

$$L_{T_{\text{конд}}} = L_{100\,^\circ\text{C}} + \frac{p_{\text{атм}} - p_{\text{конд}}}{\rho_{\text{в}}} + \left(T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}}\right)\left(c_{\text{в}} - \frac{11}{2}\frac{R}{M}\right) = 2{,}28\ {}^{\text{МДж}}/_{\text{кг}}$$

Разница между значениями удельной теплоты парообразования (конденсации) при разных температурах:

$$\Delta L = L_{T_{\text{конд}}} - L_{100\,^\circ\text{C}} = \frac{p_{\text{атм}} - p_{\text{конд}}}{\rho_{\text{в}}} + \left(T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}}\right)\left(c_{\text{в}} - \frac{11}{2}\frac{R}{M}\right) = 21{,}6\ {}^{\text{кДж}}/_{\text{кг}}$$

Интересно отметить, что если в сумме пренебречь первым слагаемым, содержащим давления (а оно на самом деле малое), то разница ΔL оказывается прямо пропорциональна разности температур $T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}}$, а коэффициентом пропорциональности оказывается разность удельных теплоемкостей воды и пара при изобарном процессе.

В3. Для определения КПД цикла воспользуемся выражением:

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{пол}}} = \frac{Q_{\text{пол}} - Q_{\text{отд}}}{Q_{\text{пол}}} = 1 - \frac{Q_{\text{отд}}}{Q_{\text{пол}}}$$

Теплота поступает в систему на этапе 6-1-2-3. Ее несложно рассчитать, используя уже записанные выше выражения:

$$Q_{пол} = Q_{6-1} + Q_{1-2} + Q_{2-3} = c_в m(T_{кип} - T_{конд}) + L_{100\,°C} m + \frac{11}{2}\frac{m}{M}R(T_{max} - T_{кип})$$

Отдает теплоту система во время конденсации водяного пара. Отдаваемую теплоту несложно определить, используя результаты предыдущего пункта:

$$Q_{отд} = L_{T_{конд}} m$$

Тогда КПД цикла равен:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{отд}}{Q_{пол}} = 1 - \frac{L_{T_{конд}}}{c_в(T_{кип} - T_{конд}) + L_{100\,°C} + \frac{11}{2}\frac{R}{M}(T_{max} - T_{кип})} = 3{,}54\ \%$$

Тепловая машина Карно с такой же максимальной и минимальной температурой работала бы с КПД:

$$\eta_{Карно} = 1 - \frac{T_{конд}}{T_{max}} = 8{,}40\ \%$$

Предложенный тепловой двигатель, как видим, обладает небольшим КПД, однако он всего в 2,4 раза меньше наилучшего возможного КПД при тех же температурах.