Задача 11-1. «Разминка»

Задача 1.1

Для расчета периодов колебаний можно использовать как динамический, так и энергетический подход. Воспользуемся энергетическим подходом. В рамках этого метода необходимо ввести некоторую переменную величину x. Далее необходимо найти кинетическую энергию системы, представив ее в виде

$$E_k = Mv^2. \tag{1}$$

Где $v = x'$ - первая производная от координаты по времени, M - постоянная величина.

Найти потенциальную энергию, как функцию координаты $U(x)$, Полагая смещение от положения равновесия малым, записать приближенное выражение для изменения потенциальной энергии, оставляя только квадратичные слагаемые, т.е представив это изменение в виде

$$U = Kx^2. \tag{2}$$

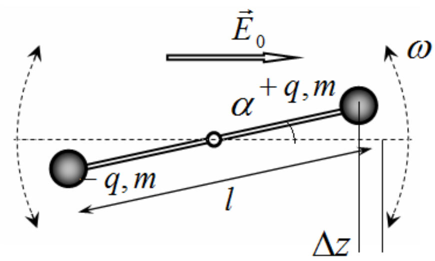
Где K - также постоянная величина. Затем записать уравнение закона сохранения энергии:

$$Mv^2 + Kx^2 = const, \tag{3}$$

которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}. \tag{4}$$

1.1.1 В положении равновесия ось маятника совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля. В качестве координаты будем рассматривать угол отклонения маятника от этого направления α. Производная от этого угла есть угловая скорость вращения ω.



Кинетическая энергия маятника легко рассчитывается по формулам

$$E_k = 2\frac{mv^2}{2} = m\left(\frac{l}{2}\omega\right)^2 = \frac{ml^2}{4}\omega^2. \tag{5}$$

Потенциальная энергия каждого шарика выражается через разность потенциалов в положении равновесия и в отклоненном положении. Поэтому

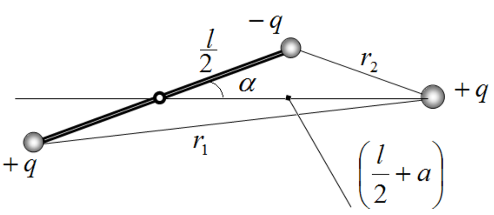
$$\Delta U = 2q\Delta\varphi = 2qE\Delta z = 2qE\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = qEl\frac{\alpha^2}{2}. \tag{6}$$

Используя формулу (4) и полученные выражения для энергий находим период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2qE}}. \tag{7}$$

1.1.2 Выражение для кинетической энергии (5) справедливо и в данном случае.

Рассмотрим потенциальную энергию взаимодействия зарядов на маятнике с одним из неподвижных зарядов. Энергия взаимодействия шариков выражается формулой (см. рис.)



$$U = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{8}$$

Расстояния между шариками можно выразить из теоремы косинусов:

$$r_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}+a\right)^2 \pm 2\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}+a\right)\cos\alpha}\ . \tag{9}$$

В формулу для потенциальной энергии входят величины обратные расстояниям, поэтому сразу проведем их разложение, учитывая малость угла α :

$$r_{1,2}^{-1} = \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}+a\right)^2 \pm 2\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}+a\right)\cos\alpha\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}+a\right)^2 \pm 2\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}+a\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\left(\frac{l}{2}+a\pm\frac{l}{2}\right)^2 \mp \left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}+a\right)\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{l}{2}+a\pm\frac{l}{2}\right)^{-1}\left(1\mp\frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}+a\right)}{\left(\frac{l}{2}+a\pm\frac{l}{2}\right)^2}\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx$$

$$= \left(\frac{l}{2}+a\pm\frac{l}{2}\right)^{-1}\left(1\pm\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}+a\right)}{\left(\frac{l}{2}+a\pm\frac{l}{2}\right)^2}\alpha^2\right)$$

Запишем эти выражения отдельно:

$$\begin{aligned} r_1^{-1} &= (l+a)^{-1}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}+a\right)}{(l+a)^2}\alpha^2\right) = (l+a)^{-1} + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}+a\right)}{(l+a)^3}\alpha^2 \\ r_2^{-1} &= a^{-1}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}+a\right)}{a^2}\alpha^2\right) = a^{-1} - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}+a\right)}{a^3}\alpha^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Теперь подставим их в формулу для кинетической энергии (не зависящие от α слагаемые опускаем):

$$U = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}+a\right)}{(l+a)^3} + \frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}+a\right)}{a^3}\right)\alpha^2 \tag{11}$$

Снова используем формулу (5) для периода колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 m l^2}{q^2\left(\frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}+a\right)}{(l+a)^3} + \frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}+a\right)}{a^3}\right)}}\ . \tag{12}$$

1.1.3 Так как выражение для кинетической энергии остается неизменным, то необходимо только просуммировать выражения для энергия потенциальных (фактически сложить два коэффициента K в формуле (5)). Это приведет к тому, что для периодов колебаний будет выполняться соотношение:

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_1 \cdot T_2}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}\ . \tag{13}$$

Задача 1.2

1.2.1 В данном случае будет наблюдаться дифракция на решетке: возникать равноотстоящие пятна.

Период данной решетки равен

$$d = 2h = 20мкм = 2{,}0 \cdot 10^{-5} м \qquad (1)$$

По формуле дифракционной решетки определим углы дифракции:

$$d \sin\theta_m = m\lambda \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_m = \frac{m\lambda}{d}. \qquad (2)$$

Пятна на экране, соответствующие данным углам дифракции, будут отстоять от центрального максимума на расстояниях

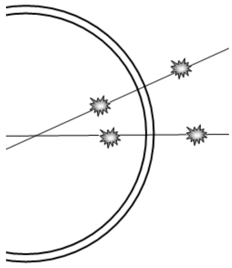
$$x_m = L\, tg\theta_m. \qquad (3)$$

В таблице 1 рассчитаны эти углы для нескольких первых максимумов.

Таблица 1.

m	$\sin\theta_m$	x, мм
1	0,0275	27,5
2	0,0550	55,0
3	0,0825	82,5
4	0,1100	110,0

Как следует из проведенных расчетов, углы дифракции являются малыми, поэтому можно считать, что их тангенсы и синусы равны. В последнем столбце приведены координаты максимумов. Видно, что четвертый максимум окажется за пределами экрана.

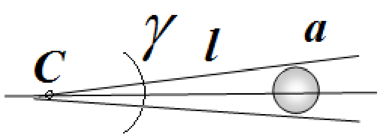


Далее необходимо учесть, что штрихи являются изогнутыми. Поэтому пятна также будут изогнутыми и представлять собой симметричные дуги окружностей.

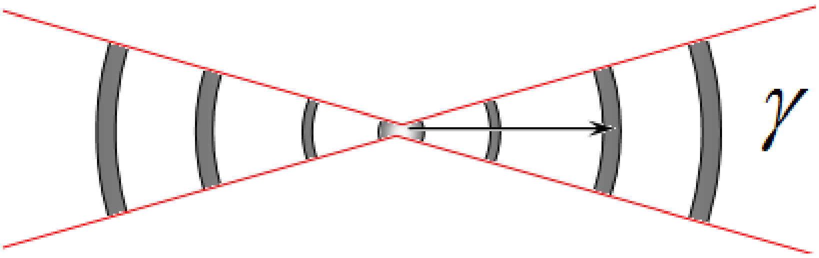
Схематически положение этих пятен при попадании света на разные части дуг решетки, показаны на рисунке (масштабы дуг решетки и расстояний до пятен не соблюдены). Вычислим угловой размер дуговых пятен, который совпадает с угловым размером лазерного пучка на решетке.

Этот угловой размер не сложно вычислить с помощью рисунка:

$$\gamma = 2\arcsin\left(\frac{a}{2l}\right) \approx 11^\circ \qquad (4)$$



На следующем рисунке показана схематически дифракционная картина.



1.2.2 При изменении расстояния l дифракционная картина сместится на такое же расстоянии, угловой размер пятен уменьшится приблизительно в два раза.