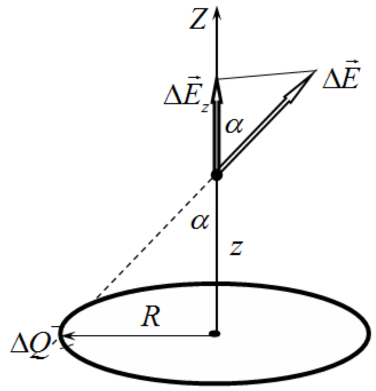
Задача 11-2. «Кольцевая»

Часть 1. Электрическое поле кольца.

1.1 Напряженность электрического поля, создаваемого зарядом кольца легко рассчитывается с помощью закона Кулона и принципа суперпозицию

Разобьем кольцо на малые участки, заряд каждого из них обозначим ΔQ_i. В точке наблюдения вектор напряженность поля $\Delta\vec{E}_i$, создаваемого этим зарядом, направлен вдоль линии, соединяющей заряд и точку наблюдения. Величина этого вектора может быть рассчитана по закону Ш. Кулона

$$\Delta E_i = \frac{\Delta Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$



где $r = \sqrt{z^2 + R^2}$ - расстояние от заряда то точки наблюдения.

Из симметрии задачи следует, что результирующий вектор напряженности направлен вдоль оси кольца. Поэтому для его расчета достаточно просуммировать проекции векторов $\Delta\vec{E}$ на эту ось $\Delta E_{iZ} = \Delta E_i \cos\alpha = \Delta E_i \dfrac{z}{r}$. Просуммируем проекции векторов напряженностей полей, создаваемых всеми зарядами, на которые мы разбили кольцо

$$E_Z = \Delta E_{1Z} + \Delta E_{2Z} + \ldots = \sum_i \Delta E_{iZ} = \sum_i \frac{\Delta Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\cos\alpha .$$

Так как все заряды находятся на равных расстояниях r от точки наблюдения, а векторы $\Delta\vec{E}_i$ образуют равные углы α с осью Z, вычисление этой суммы сводится суммированию зарядов (постоянные множители можно вынести за знак суммы):

$$E_Z = \sum_i \frac{\Delta Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{3/2}} = E_0\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{3/2}} . \qquad (1)$$

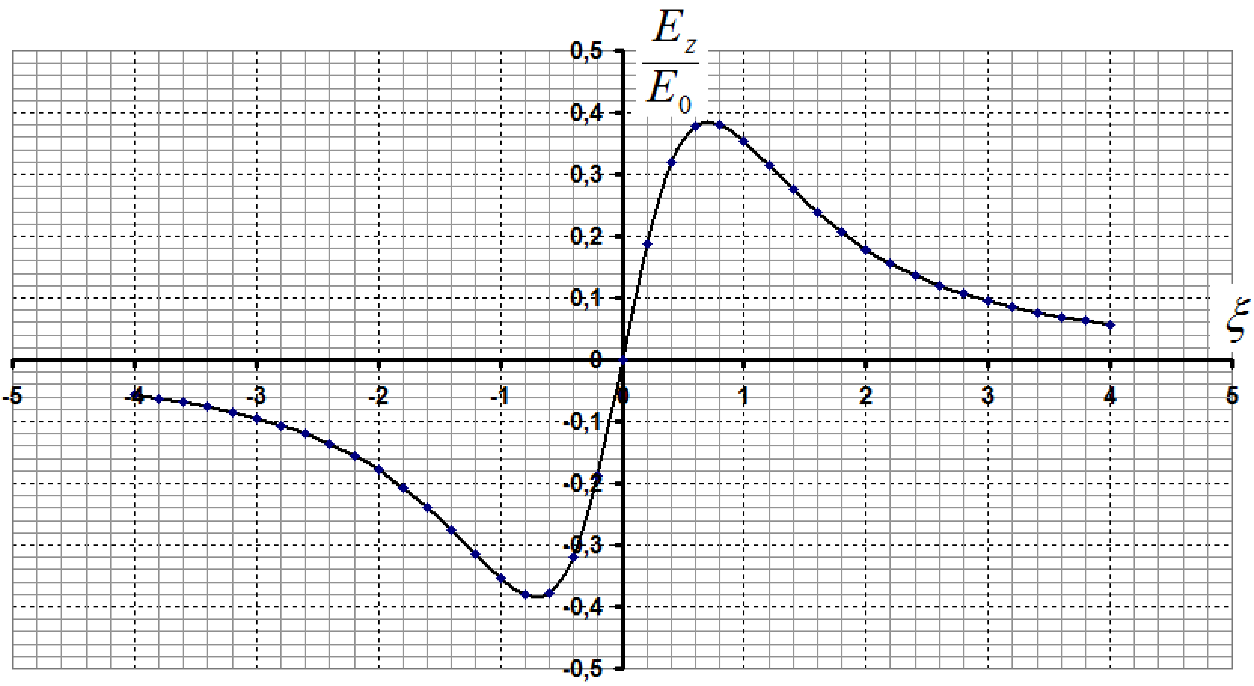
1.2 График функции $\dfrac{E_z}{E_z}(\xi)$ может быть построен традиционными способами. Результат построения показан на рисунке.

1.3 При $z >> R$ напряженность поля выражается формулой

$$E_Z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}, \qquad (2)$$

Что совпадает с полем точечного заряда, что и следовало ожидать.

График 1.2 Напряженность электрического поля кольца.



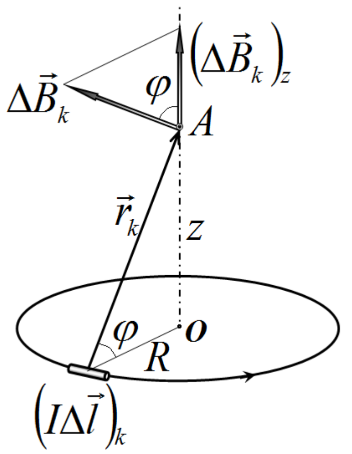
1.4 Ось диполя совпадает с направлением вектора напряженности внешнего электрического поля. Совместим ось x системы координат с направлением вектора напряженности. Результирующая сила, действующая на диполь, равна векторной сумме сил, действующих на заряды диполя,

$$F = F_+ - F_- = q\big(E(z+a) - E(z)\big) = qa\frac{\Delta E}{\Delta z} = p_e\frac{\Delta E_z}{\Delta z}. \tag{3}$$

Используя полученную формулу и выражение для напряженности поля (2)

$$F = p_e\frac{\Delta E_z}{\Delta z} = p_e\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\right)' = -\frac{p_e Q}{4\pi\varepsilon_0 z^3}. \tag{4}$$

Часть 2. Магнитное поле кольца.



- найдем индукцию поля в точке A, находящейся на оси кольца на расстоянии z от его центра . Выделяем малый участок кольца $\left(I\Delta\vec{l}\right)_k$ и строим вектор индукции поля $\Delta\vec{B}_k$, созданным этим элементом, в рассматриваемой точке. Это вектор перпендикулярен вектору $\vec{r}$, соединяющему выделенный участок с точкой наблюдения. Векторы $\left(I\Delta\vec{l}\right)_k$ и $\vec{r}_k$, как и ранее, перпендикулярны, поэтому $\sin\alpha = 1$. Так кольцо обладает осевой симметрией, то суммарный вектор индукции поля в точке A должен быть направлен по оси кольца. К этому же выводу о направлении суммарного вектора индукции можно прийти, если заметить, что каждому выделенному участку кольца имеется симметричный ему с противоположной стороны, а сумма двух симметричных векторов направлена вдоль оси кольца. Таким образом, для того чтобы определить модуль суммарного вектора индукции, необходимо просуммировать проекции векторов на ось кольца. Эта операция не представляет особой сложности, если учесть, расстояния от всех точек кольца до точки наблюдения одинаковы $r_k = \sqrt{R^2 + z^2}$, а также одинаковы углы φ между векторами $\Delta\vec{B}_k$ и осью кольца. Запишем выражение для модуля искомого суммарного вектора индукции

$$B = \sum_k \Delta B_{zk} = \sum_k \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I\Delta l)_k}{r^2}\cos\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\varphi}{r^2}\sum_k \Delta l_k = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\varphi}{r^2}2\pi R = \frac{\mu_0 IR}{2r^2}\cos\varphi .$$

Из рисунка следует, что $\cos\varphi = \frac{R}{r}$, с учетом выражения для расстояния r, получим окончательное выражение для вектора индукции поля

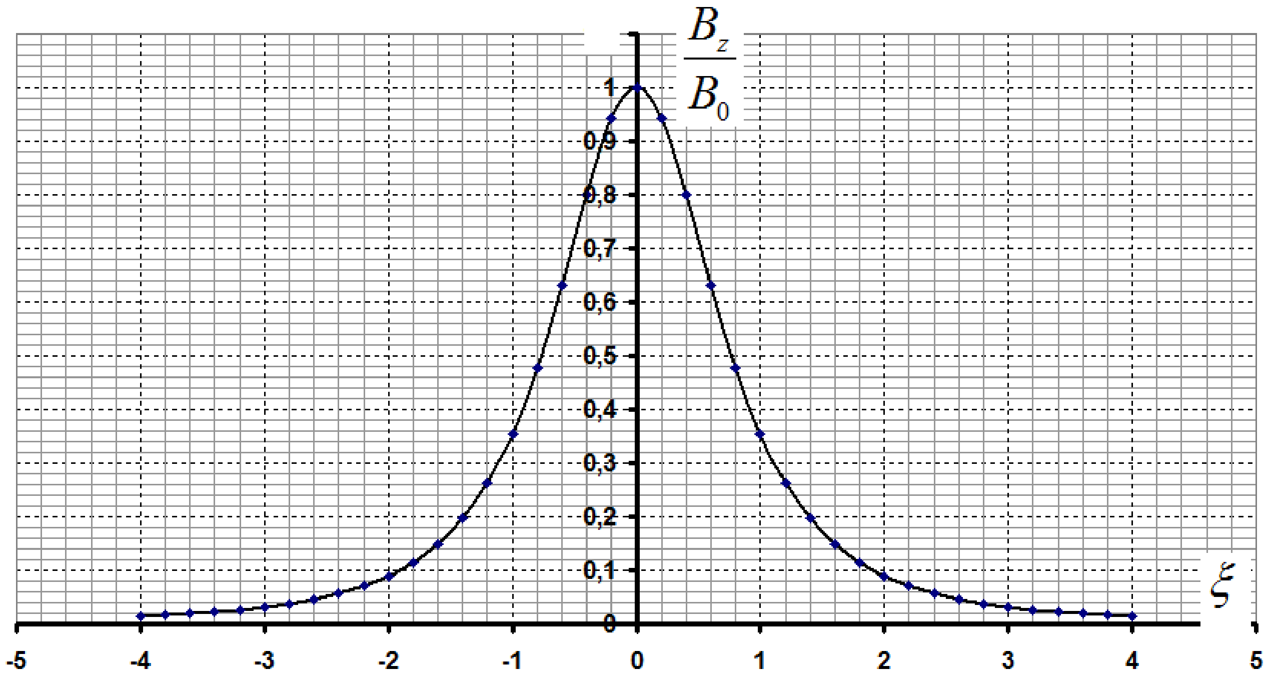
$$B = \frac{\mu_0 IR}{2r^2}\cos\varphi = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I}{2}\cdot\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} . \tag{5}$$

Это выражение можно переписать в виде

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{B_0}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}} . \tag{6}$$

График этой функции показан на следующем рисунке.

График 2.2 Магнитное поле кольцевого тока.



2.3 При $z >> R$ формула (6) принимает вид

$$B == \frac{\mu_0 I}{2}\cdot\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{\mu_0 IR^2}{2z^3} . \tag{7}$$

2.4 Сила, действующая на магнитный диполь, рассчитывается по формуле

$$F_z = p_m\frac{\Delta B_z}{\Delta z} = p_m\left(\frac{\mu_0 IR^2}{2z^3}\right)' = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0 IR^2}{z^4}p_m . \tag{8}$$

Часть 3. Взаимодействие постоянных магнитов.

Согласно подтвержденной ныне гипотезе Ампера поле постоянного магнита эквивалентно полю молекулярных токов, протекающих по его поверхности.

Для соотнесения этих полей следует приравнять магнитные моменты магнита и соответствующего тока. Так в случае цилиндрического магнита можно записать

$$JSh = IS\,. \tag{9}$$

где S - площадь основания магнита, I - сила эквивалентного тока протекающего по боковой поверхности магнита. Таким образом, поле данного магнита совпадает с полем кругового тока силой $I = Jh$, протекающего по кольцу радиуса R. Далее можно использовать все формулы, полученные в Части 2.

3.1 Так индукция в центре диска рассчитывает по формуле (5) при $z = 0$:

$$B_0(z=0) = \frac{\mu_0 I}{2}\cdot\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 Jh}{2R}\,. \tag{10}$$

3.2 Индукция поля на оси диска $B_z(z)$ описывается той же формулой

$$B(z) = \frac{\mu_0 Jh}{2}\cdot\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{11}$$

3.3 Для силы взаимодействия применима формула (8)

$$F_z = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0 IR^2}{L^4}p_m = \frac{3}{2}\frac{\mu_0 JhR^2}{L^4}Jh\pi R^2 = \frac{3}{2\pi}\frac{\mu_0\left(Jh\pi R^2\right)^2}{L^4}\,. \tag{12}$$

3.4 Поле молекулярных токов, текущих по внутренней поверхности тока эквивалентно толю кругового тока силой $I = -Jh$, протекающего по кольцу радиуса $\frac{R}{2}$. Поэтому величина индукции поля кольцевого магнита описывается «составной» формулой:

$$B(z) = \frac{\mu_0 Jh}{2}\cdot\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_0 Jh}{2}\frac{R^2/4}{\left(R^2/4+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = B_0\left(\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{0{,}25}{\left(0{,}25+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{13}$$

График этой функции показан на последнем рисунке.

График 3.4 Поле кольцевого магнита.