Задача 11.3 «Пилообразный и импульсный ток»

1.

1.1. Период колебаний напряжения ***T=3,0мс***.

1.2. Зависимости *U(t)* на временном интервале 0,0 – 0,50мс прямо пропорциональная. Зависимости *U(t)* имеет вид:

$$\boldsymbol{U = k_1 t \quad (1),}$$

где $k_1 = 8{,}0\frac{\text{кВ}}{\text{с}}$.

На временном интервале 0,50 – 2,5мс зависимости *U(t)* линейная. Зависимости *U(t)* имеет вид:

$$\boldsymbol{U = U_0 + k_2 t\,(B) \quad (2),}$$

где $k_2 = -4{,}0\frac{\text{кВ}}{\text{с}}$, $U_0 = 6{,}0\text{В}$.

1.3. Если напряжение в электрической цепи, содержащей конденсатор, изменяется, то в цепи течёт ток зарядки или перезарядки конденсатора. Для получения зависимости *I(t)* воспользуемся уравнением

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \qquad (3).$$

Заряд конденсатора определяется уравнением

$$q = CU \quad (4).$$

На временном интервале 0,0 – 0,50мс

$$q = Ck_1 t \quad (5).$$

Следовательно:

$$\Delta q = Ck_1 \Delta t \quad (6),$$

$$\boldsymbol{I_1 = Ck_1 = 1{,}0\text{мкФ} \cdot 8{,}0\frac{\text{кВ}}{\text{с}} = \ 8{,}0\text{мА} \ \ (8).}$$

На временном интервале и 0,50 – 2,5мс

$$q = CU_0 + Ck_2 t \quad (9).$$

Следовательно:

$$\Delta q = Ck_2 \Delta t \quad (10),$$

$$\boldsymbol{I_2 = Ck_2 = 1{,}0\text{мкФ} \cdot \left(-4{,}0\frac{\text{кВ}}{\text{с}}\right) = \ -4{,}0\text{мА} \ \ (11).}$$

При заданной форме напряжения сила тока в электрической цепи, содержащей источник напряжения и конденсатор, от времени не зависит.

1.4. График зависимости *I(t)* на временном интервале в два периода представлен на рисунке 10.

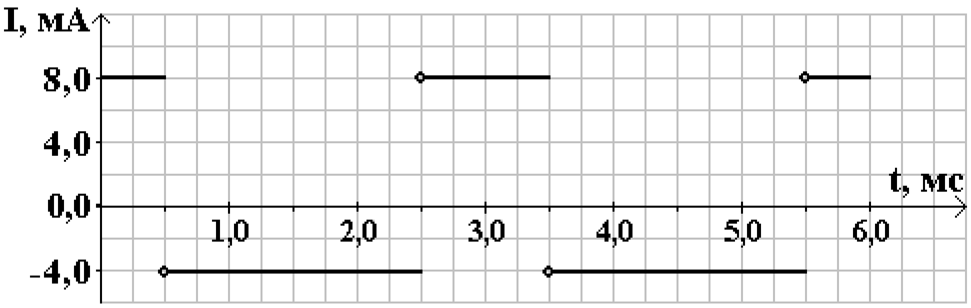


Рисунок 10.

2.

2.1. На временном интервале 0,0 – 1,0мс зависимость *U(t)* прямо пропорциональная

$$U(t) = k_3 t \quad (12),$$
где
$$k_3 = 4{,}0 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{c}.$$

Так как, согласно условию задачи, полное сопротивление цепи равно нулю, то Закон Ома для полной цепи приобретает вид:

$$U + \mathcal{E}_{si} = 0 \qquad (13).$$
Так как
$$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad (14),$$
то
$$U - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0 \qquad (15).$$
Следовательно
$$L\frac{\Delta I}{\Delta t} = U \quad (16),$$
откуда
$$\Delta I = \frac{U}{L}\Delta t \qquad (17).$$

Подставляя в (17) уравнение (12) получим:

$$\Delta I = \frac{k_3 t}{L}\Delta t \qquad (18),$$
откуда
$$\Delta I = \frac{k_3}{2L}\Delta(t^2) \qquad (19),$$

$$\boldsymbol{I = \frac{k_3}{2L}t^2} \qquad (\mathbf{20}).$$
На временном интервале 1,0 – 2,0мс $U(t) = 0$.
Закон Ома для полной цепи приобретает вид:

$$L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0 \qquad (21),$$
откуда $\Delta I = 0$, следовательно
$$\boldsymbol{I(t) = const} \qquad (\mathbf{22}).$$
Сила тока на указанном временном интервале остаётся постоянной и имеет значение, как и в момент времени 1,0мс. Обозначим $t_1 = 1{,}0\text{мс}$, тогда

$$\boldsymbol{I(t)} = I(t_1) = \frac{k_3}{2L}t_1^2 = \frac{4{,}0 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{с}}}{2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}\text{Гн}} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-6}\text{с}^2 = \mathbf{2{,}0}\text{А}.$$

2.2. График зависимости силы тока от времени *I(t)* на временном интервале 0,0 – 5,0мс представлен на рисунке 11.

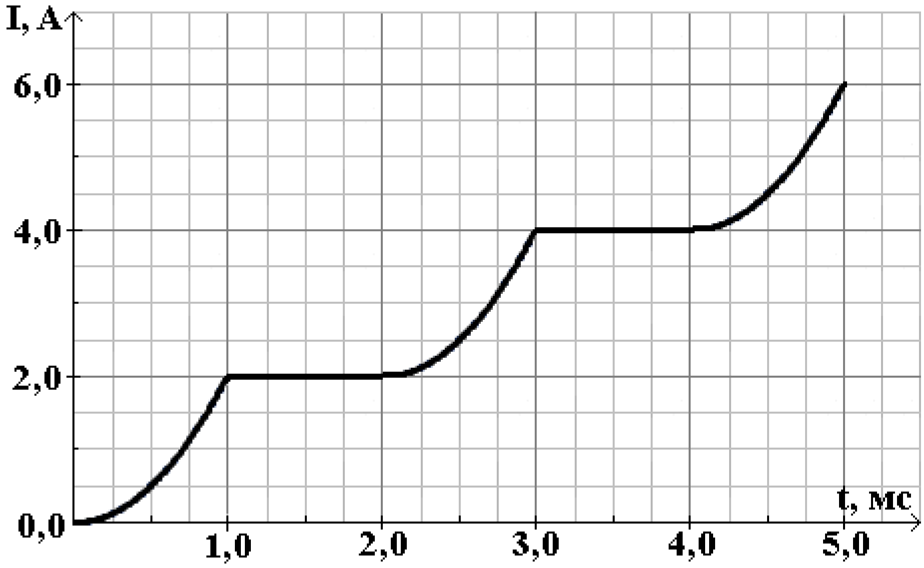


Рисунок 11.

3.

3.1. Средняя тепловая мощность будет определяться зависимостью модуля напряжения и силы тока от времени. Построим графики данных зависимостей (см. рис. 12, 13).

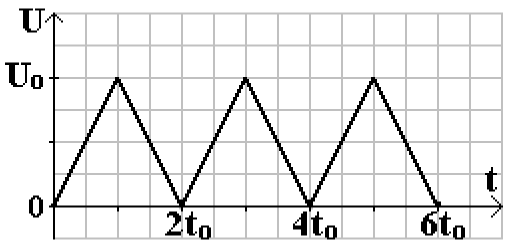


Рисунок 12. Зависимость модуля напряжения от времени

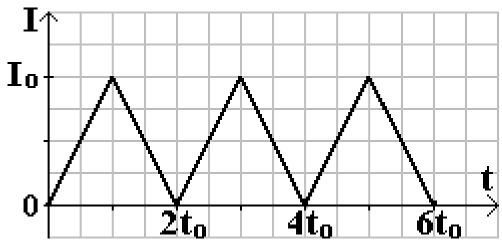
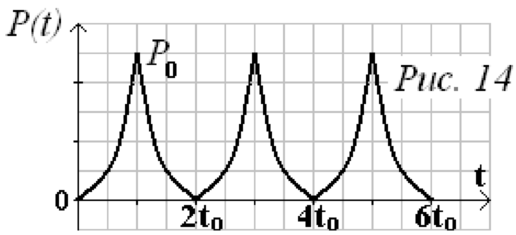


Рисунок 13. Зависимость модуля силы тока от времени



«Произведение» зависимостей на рисунках 12 и 13 даст нам зависимость мощности, выделяющейся на резисторе, от времени. Несложно догадаться, что зависимость $P(t)$ будет «состоять» из симметричных кусочков парабол (рис. 14) с максимальной точкой $P_0 = U_0 I_0$.

Средняя тепловая мощность за длительный промежуток времени будет равна средней тепловой мощности за период колебаний модуля силы тока и напряжения.

Так как на временном интервале, равном периоду колебаний модуля силы тока и напряжения, графики данных величин симметричны относительно прямой, проходящей через точку максимума и перпендикулярной оси времени, то средняя тепловая мощность за первую половину периода t_0 будет равна средней тепловой мощности за вторую половину периода и равна средней тепловой мощности за период. Таким образом, достаточно определить среднюю тепловую мощность за первую половину периода t_0 колебаний модуля силы тока и напряжения.

Определим мгновенное значение тепловой мощности на временном интервале $[0, t_0]$.

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) \qquad (23),$$

где

$$U(t) = \frac{U_0}{t_0}t \quad (24), \qquad I(t) = \frac{I_0}{t_0}t \quad (25).$$

Подставляя (24) в (25) получим:

$$P(t) = \frac{U_0 I_0}{t_0^2}t^2 \qquad (26).$$

С другой стороны, мгновенную мощность можно определить как

$$P(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad (27).$$

Приравнивая (26) и (27) и выполняя преобразования, получим:

$$\Delta Q = \frac{U_0 I_0}{t_0^2}t^2 \Delta t \qquad (28),$$

откуда

$$Q(t) = \frac{U_0 I_0}{3t_0^2}t^3 \qquad (29).$$

Теплота, выделяемая за половину периода колебаний модуля силы тока и напряжения

$$Q(t_0) = \frac{U_0 I_0 t_0}{3} \qquad (30).$$

Средняя тепловая мощность, выделяемая на резисторе R_0:

$$\boldsymbol{< P >= \frac{Q(t_0)}{t_0} = \frac{U_0 I_0}{3} \quad (31),}$$

$$\boldsymbol{< P >= \frac{I_0^2 R_0}{3} \quad (32), \qquad < P >= \frac{U_0^2}{3R_0} \quad (33).}$$

3.2. Среднюю тепловую мощность, выделяемую на резисторе R_0, через действующие значения силы тока и напряжения можно определить как:

$$< P >= I_д^2 R_0 \quad (34), \qquad < P >= \frac{U_д^2}{R_0} \quad (35).$$

Приравнивая (32) и (34), (33) и (35) получим:

$$\boldsymbol{I_д = \frac{I_0}{\sqrt{3}} \quad (36), \qquad U_д = \frac{U_0}{\sqrt{3}} \quad (37).}$$

4.

4.1. Изобразим эквивалентные схемы заданной электрической цепи для положительной и отрицательной части периода (рис. 15 и 16)

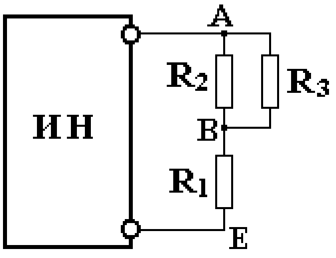


Рисунок 15. Эквивалентная схема электрической цепи для положительной части периода

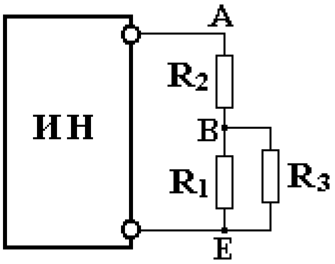


Рисунок 16. Эквивалентная схема электрической цепи для отрицательной части периода

Зависимости силы тока от времени $I_3(t)$ на резисторе R_3 на положительной части периода

$$I_3(t) = \frac{U_{AB}(t)}{R_3} \quad (38)$$

Где

$$R_{AB} = \frac{4}{3}\,\text{Ом} \quad (39), \qquad U_{AB}(t) = \frac{2U(t)}{5} \quad (40).$$

$$I_3(t) = \frac{U(t)}{5} \quad (41).$$

Для второго интервала получим

$$R_{BE} = \frac{R_3}{2} = 1{,}0\ \text{Ом} \quad , \qquad U_{BE}(t) = \frac{U(t)}{5}$$

График зависимости силы тока от времени $I_3(t)$ на резисторе R_3 на временном интервале в два периода представлен на рисунке 17.

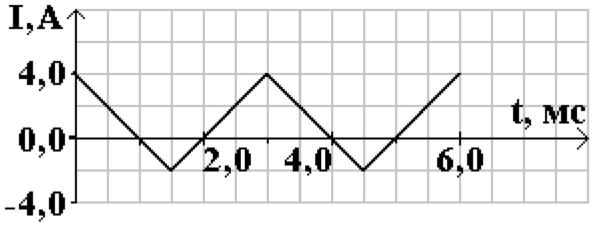


Рисунок 17.

4.2. Для определения количества теплоты построим графики зависимостей модуля напряжения и силы тока на резисторе R_3 от времени (рис. 18 и 19).

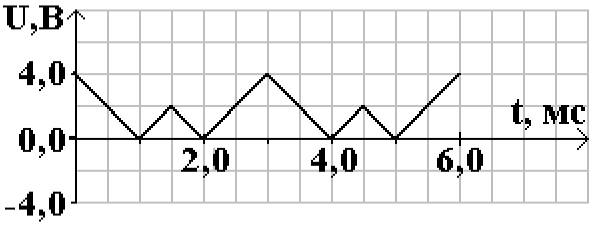


Рисунок 18. Зависимость модуля напряжения от времени

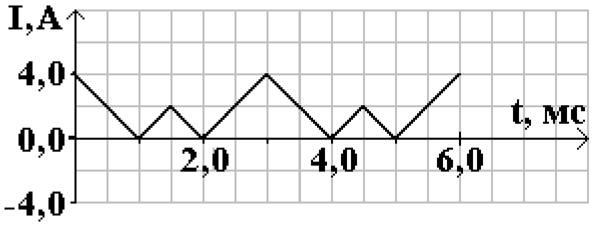


Рисунок 19. Зависимость модуля силы тока от времени

Обозначим среднее значение тепловой мощности выделяющейся на положительной части периода $<P>_1$, на отрицательной части периода – $<P>_2$.

Обозначим максимальные значения модулей напряжения и силы тока на положительной части периода U_{01} и I_{01}, на отрицательной части периода – U_{02} и I_{02}. Из графиков (рис. 8 и 16) следует, что период колебаний силы тока и напряжения одинаков и составляет 3,0мс. Длительность положительной части периода равна 2,0мс, отрицательной 1,0мс.

Тогда

$$Q = Q_1 + Q_2 \ (42), \qquad Q = <P>_1 \cdot \frac{2}{3}\Delta t + <P>_2 \cdot \frac{1}{3}\Delta t \quad (43).$$

Применяя равенство (31) получим:

$$<P>_1 = \frac{U_{01}I_{01}}{3} \quad (44), \qquad <P>_2 = \frac{U_{02}I_{02}}{3} \quad (45).$$

Подставляя (44) и (45) в (43) получим:

$$Q = \frac{2U_{01}I_{01}}{9}\Delta t + \frac{U_{02}I_{02}}{9}\Delta t = (2U_{01}I_{01} + U_{02}I_{02})\frac{\Delta t}{9} \qquad (46).$$

По графикам (рис. 18 и 19) определяем:

$U_{01} = 4{,}0\text{В};\qquad I_{01} = 4{,}0\text{А};\qquad U_{02} = 2{,}0\text{В}\qquad I_{02} = 2{,}0\text{А}.$

Подставляя эти значения в (45) получим:

$$\boldsymbol{Q} = (2 \cdot 4{,}0\text{В} \cdot 4{,}0\text{А} + 2{,}0\text{В} \cdot 2{,}0\text{А})\frac{6{,}0\text{мс}}{9} = \mathbf{24}\text{мДж}. \quad (47)$$