Задача 9-2. Векторная кинематика

Задача допускает как графическое, так и алгебраическое решение (для его реализации бланк можно оцифровать). Мы будем использовать оба подхода. Для сокращения записей компоненты векторов (метрах, или «клеточках») будем записывать в скобках, например, положение тела в момент времени $t_0 = 0$: $\vec{r}_0 = (4,\ 35)$. Для всех векторов (перемещений, скоростей, ускорения) будем использовать систему единиц СИ.

1 Так как движение является равноускоренным, то векторы перемещений тела из положения в момент времени $t_0 = 0$ за время t описываются формулой:

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \tag{1}$$

Для моментов времени $t_1 = 1{,}0c$ и $t_4 = 4{,}0c$ можно записать:

$$\begin{cases} \Delta\vec{r}_{01} = \vec{v}_0 t_1 + \frac{1}{2}\vec{g}t_1^2 \\ \Delta\vec{r}_{04} = \vec{v}_0 t_4 + \frac{1}{2}\vec{g}t_4^2 \end{cases} \tag{2}$$

Это система уравнений относительно неизвестных векторов ускорения и начальной скорости имеет решение

$$\begin{cases} \Delta\vec{r}_{01} = \vec{v}_0 t_1 + \frac{1}{2}\vec{g}t_1^2 \\ \Delta\vec{r}_{04} = \vec{v}_0 t_4 + \frac{1}{2}\vec{g}t_4^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\Delta\vec{r}_{01}}{t_1} = \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\vec{g}t_1 \\ \frac{\Delta\vec{r}_{04}}{t_4} = \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\vec{g}t_4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}\vec{g}(t_4 - t_1) = \frac{\Delta\vec{r}_{04}}{t_4} - \frac{\Delta\vec{r}_{01}}{t_1} \Rightarrow$$

$$\vec{g} = \frac{2}{t_4(t_4 - t_1)}\Delta\vec{r}_{04} - \frac{2}{t_1(t_4 - t_1)}\Delta\vec{r}_{01} \tag{3}$$

Подстановка численных значений времен дает следующие значения искомых векторов

$$\vec{g} = \frac{2}{t_4(t_4 - t_1)}\Delta\vec{r}_{04} - \frac{2}{t_1(t_4 - t_1)}\Delta\vec{r}_{01} = \frac{1}{6}\Delta\vec{r}_{04} - \frac{2}{3}\Delta\vec{r}_{01} = \frac{\Delta\vec{r}_{04} - 4\Delta\vec{r}_{01}}{6}. \tag{4}$$

Эти векторы можно построить на бланке (см. рис.). Там же указан вектор $\vec{S}_1$

Можно также найти численные значения их компонент (в изображенной системе координат):

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = (3,\ 31) \\ \vec{r}_1 = (4,\ 35) \\ \vec{r}_4 = (19,\ 23) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\vec{r}_{01} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (1,\ 4) \\ \Delta\vec{r}_{04} = \vec{r}_4 - \vec{r}_0 = (16,\ -8) \end{cases} \Rightarrow \vec{g} = \frac{\Delta\vec{r}_{04} - 4\Delta\vec{r}_{01}}{6} = (2,\ -4) \tag{5}$$

Модуль вектора ускорения равен

$$g = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4{,}5\frac{м}{c^2}. \tag{6}$$

2. Вектор скорости $\vec{v}_0$ можно выразить из первого уравнения системы (2):

$$\Delta\vec{r}_{01} = \vec{v}_0 t_1 + \frac{1}{2}\vec{g}t_1^2 \Rightarrow \vec{v}_0 = \frac{\Delta\vec{r}_{01}}{t_1} - \frac{1}{2}\vec{g}t_1. \tag{7}$$

Тогда требуемый вектор

$$\vec{S}_2 = \vec{v}_0 t_1 = \Delta\vec{r}_{01} - \frac{1}{2}\vec{g}t_1^2 = \Delta\vec{r}_{01} - \frac{1}{2}\vec{S}_1 \tag{8}$$

Построение этого вектора также показано на рисунке.

Численные значения его компонент:

$$\vec{S}_2 = \frac{\Delta\vec{r}_{01}}{t_1} - \frac{1}{2}\vec{g}t_1 = (0,\,6)\,. \tag{9}$$

Модуль вектора скорости, очевидно, равен $v_0 = 6{,}0\frac{м}{с}$.

3. Используя закон равноускоренного движения (1), положение объекта в произвольный момент времени можно описать формулой

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 = \vec{r}_0 + \vec{S}_2\frac{t}{t_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t_1}\right)^2\vec{S}_1. \tag{10}$$

Так в момент падения $t = 5{,}0с$ радиус-вектор объекта равен

$$\vec{r}_5 = \vec{r}_0 + 5\vec{S}_2 + \frac{25}{2}\vec{S}_1 = (28,11) \tag{11}$$

4. Линия горизонта перпендикулярна вектору ускорения $\vec{g}$ (или $\vec{S}_1$) и проходит через точку падения. На рисунке – жирная двойная линия.

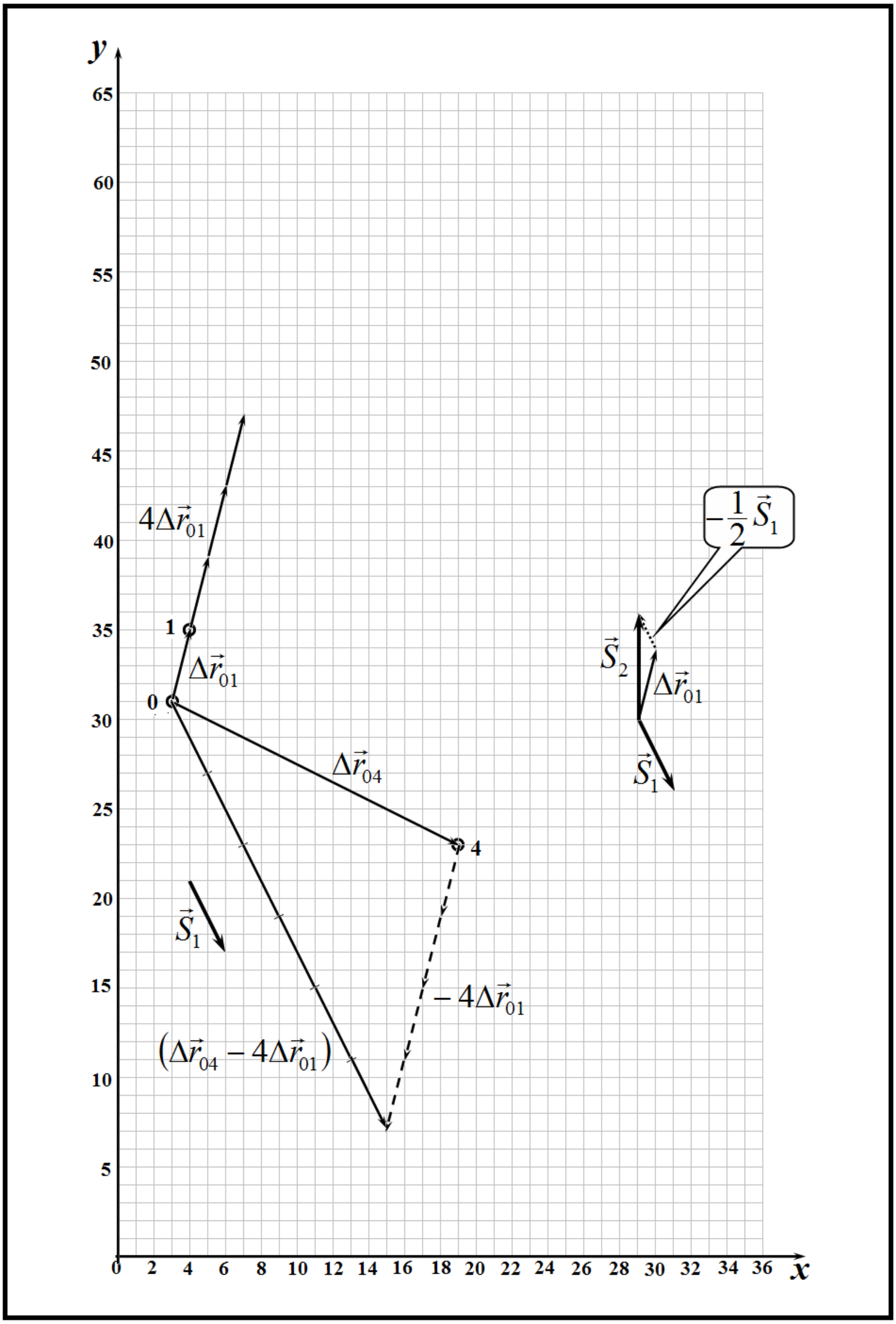
5. Расчет координат остальных точек выполняется аналогично, как графически, так и алгебраически. Отметим, что приведенная формула (10) справедлива как для положительных, так и для отрицательных времен. Построения этих точек показаны на рисунке. В таблице приведены рассчитанные значения координат.

T,c	X, м	Y, м
0	3	31
1	4	35
2	7	35
3	12	31
4	19	23
5	28	11
-1	4	23
-2	7	11
-3	12	-5

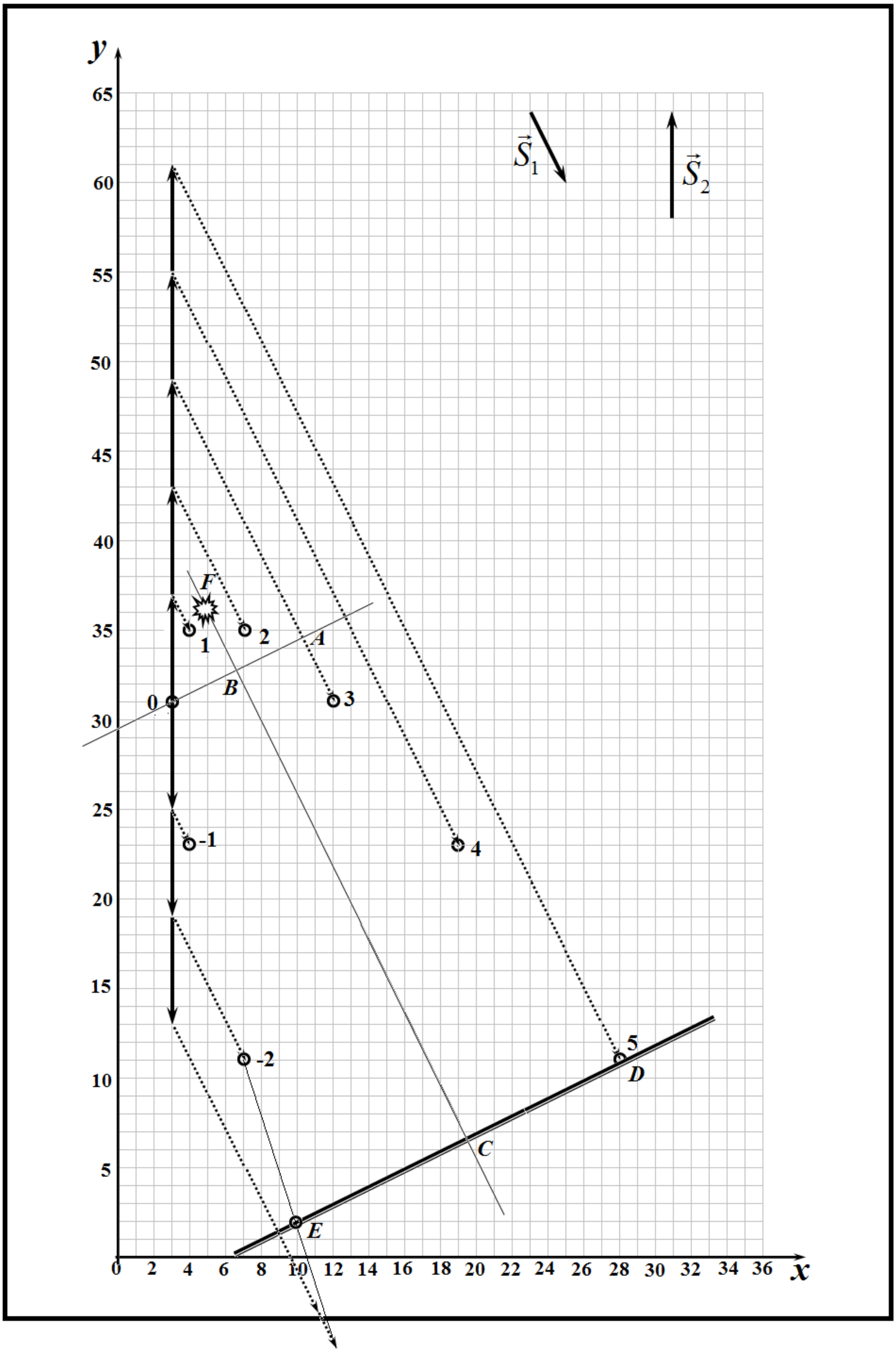
6. Определение точки вылета может быть проведено различными способами.
Простейший из них – формально отметить точку траектории, соответствующую моменту времени $t = -3{,}0с$, заметить, что она лежит ниже линии горизонта. На интервале времени $[-3,-2]$ участок траектории приближенно можно считать отрезком прямой линии. Поэтому точка вылета есть точка пересечения указанного отрезка траектории с линией горизонта – точка E на рисунке.

Более точным является следующий способ. Траектория движения симметрична относительно вертикали на всех уровнях. Поэтому проведем через первую точку O прямую OA, параллельную линии горизонта и через ее середину проведем перпендикуляр BC. Эта прямая является осью симметрии параболы (траектории). Поэтому расстояние от точки вылета E до основания перпендикуляра C, на таком же расстоянии, что и точка падения D.
7. Положения вершины параболы с требуемой точностью можно указать и «на глаз» - точка F!

Бланк 1.


y
x
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36
$4\Delta\vec{r}_{01}$
1
$\Delta\vec{r}_{01}$
0
$\Delta\vec{r}_{04}$
4
$\vec{S}_1$
$-4\Delta\vec{r}_{01}$
$\left(\Delta\vec{r}_{04}-4\Delta\vec{r}_{01}\right)$
$-\frac{1}{2}\vec{S}_1$
$\vec{S}_2$
$\Delta\vec{r}_{01}$
$\vec{S}_1$

Бланк 2



y
x
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
$\vec{S}_1$
$\vec{S}_2$
F
1
2
A
B
0
3
-1
4
-2
5
D
C
E