Задача 11-3 Колебания магнитов

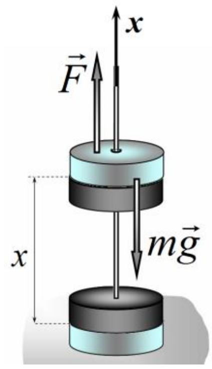
Комментарии к условию задачи.

1. Прежде всего отметим. что указанная зависимость силы взаимодействия магнитов от расстояния между ними действительно выполняется, при расстояниях между магнитами, превышающих размеры самих магнитов. Это выражение описывает диполь-дипольное взаимодействие. Кольцевой магнит можно рассматривать как круговой контур с током, взаимодействие двух контуров и описывается предложенной формулой. Кстати, проверка этой формулы служила и может послужить в дальнейшем темой для экспериментальных задач.
2. В задаче рассматриваются условия возникновения колебаний, причем при силах, отличных от квазиупругих. Поэтому для решения данной задачи необходимо использовать необходимое и достаточное условия возможности свободных колебаний (любых, не только гармонических): **колебания возможны вблизи положения устойчивого равновесия**! Поэтому почти все решение этой задачи сводится к определению положений устойчивого равновесия. Подчеркнем, важно не просто найти положения равновесия, а еще и проанализировать их устойчивость. Ну а в тех частях, где требуется определить период колебаний, следует использовать приближенное описание, т.е. считать, что возвращающая сила линейно зависит от смещения из положения равновесия. В этом приближении колебания описываются как знакомые гармонические колебания.
3. Математические подсказки в условии авторы заданий дают не для того, чтобы запутать участников (они с успехом это делают и без подсказок), а для того, чтобы помочь разрешить некоторые математические проблемы. Поэтому надо быть уверенным, что где-то касательную надо будет построить!

Теперь можно приступать к последовательному решению пунктов этой задачи.

Часть 1. Вертикальные колебания.

1.1 Так как магниты направлены полюсами навстречу, то они отталкиваются друг от друга. В положении равновесия сила тяжести, действующая на верхний магнит, уравновешивается силой магнитного отталкивания, т.е.



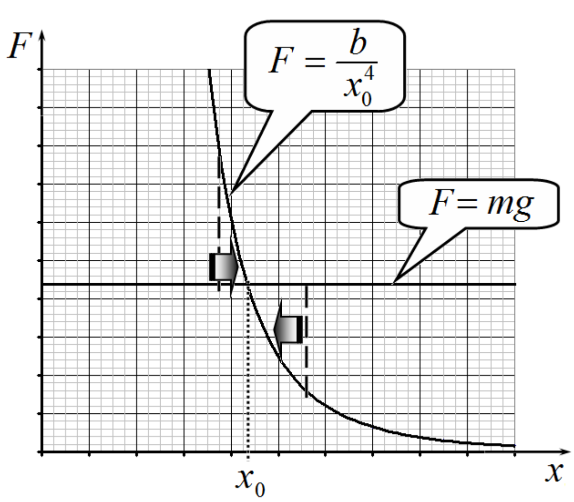
$$mg = F = \frac{b}{x_0^4}. \qquad (1)$$

Из этого уравнения следует, что в положении равновесия

$$x_0 = \sqrt[4]{\frac{b}{mg}}. \qquad (2)$$

1.2 Условием возможности колебаний в любой системе – является наличие устойчивого положения равновесия.

Не сложно показать, что найденное положение равновесия устойчиво: при смещении магнита вверх, сила тяжести превышает магнитную силу, поэтому результирующая сила будет направлена вниз, т.е. к положению равновесия; и наоборот, при смещении магнита вниз возрастет магнитная сила, поэтому результирующая сила опять будет направлена к



положению равновесия. Графики зависимости сил от расстояния иллюстрируют эти рассуждения

Следовательно, **вблизи этого положения равновесия колебания верхнего магнита возможны**!

Для расчета периода колебаний запишем уравнение второго закона Ньютона для верхнего магнита

$$ma = \frac{b}{x^4} - mg \ . \qquad (3)$$

Так как мы рассматриваем малые колебания, то представим координату магнита в виде

$$x = x_0 + \delta \ , \qquad (4)$$

где $\delta(t)$ - малое отклонение от положения равновесия. Далее упростим уравнение (3), используя приведенную формулу

$$ma = \frac{b}{(x_0 + \delta)^4} - mg = \frac{b}{x_0^4}\left(1 + \frac{\delta}{x_0}\right)^{-4} - mg \approx \frac{b}{x_0^4}\left(1 - 4\frac{\delta}{x_0}\right) - mg = -4\frac{b}{x_0^5}\delta \ , \qquad (5)$$

или

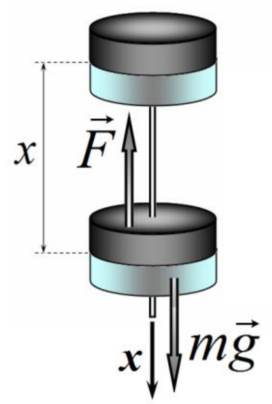
$$a = -4\frac{b}{mx_0^5}\delta \ . \qquad (6)$$

Это уравнение есть известное уравнение гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mx_0^5}{4b}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4b}\left(\frac{b}{mg}\right)^{\frac{1}{4}}} \ . \qquad (7)$$

<u>Примечание.</u> Полученное уравнение (5) также подтверждает устойчивость положения равновесия, так как показывает, что результирующая сила направлена в сторону, противоположную смещению от положения равновесия.

1.3 – 1.4 В данной части рассуждения полностью аналогичны, поэтому сразу запишем уравнение второго закона Ньютона для нижнего магнита (направление оси изменено):



$$ma = mg - \frac{b}{x^4} \ . \qquad (8)$$

В положении равновесия справедливо уравнение

$$mg = \frac{b}{x_0^4} \ . \qquad (9)$$

Поэтому положение равновесия определяется тем же выражением

$$x_0 = \sqrt[4]{\frac{b}{mg}} \ . \qquad (10)$$

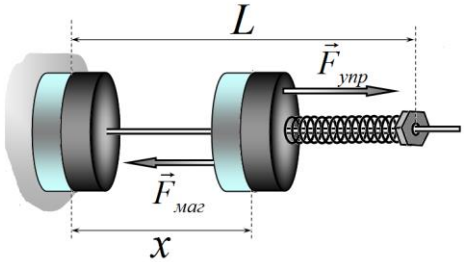
Однако, **данное положение равновесия является не устойчивым, поэтому здесь колебания не возможны!**

Доказать это можно с помощью логических рассуждений, графика, или непосредственно из уравнения (8). Преобразование этого уравнения в приближении малых отклонений приводит к результату

$$ma = mg - \frac{b}{(x_0 + \delta)^4} \approx +4\frac{b}{x_0^5}\delta \ . \qquad (11)$$

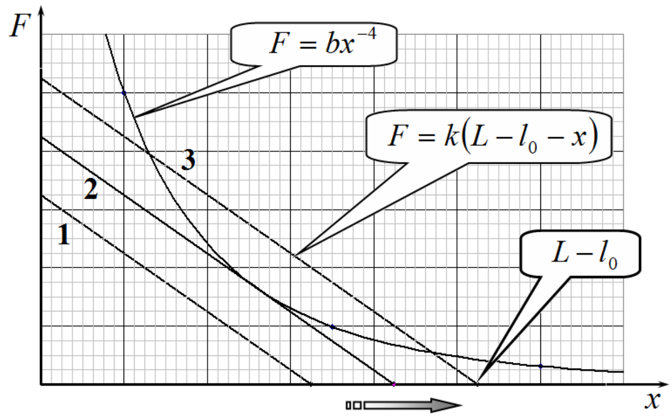
В этом уравнении знак «плюс» явно указывает, что результирующая сила направлена в ту же сторону, что и смещение, то есть эта сила еще дальше уводит магнит от положения равновесия.

Часть 2. Горизонтальные колебания.



2.1 Колебания возможны только при наличии положения устойчивого равновесия, поэтому сначала найти эти положения. На подвижный магнит в рассматриваемом случае действует сила магнитного притяжения и сила упругости со стороны пружины. В положении равновесия эти силы равны по модулю. Из этого условия следует уравнение:

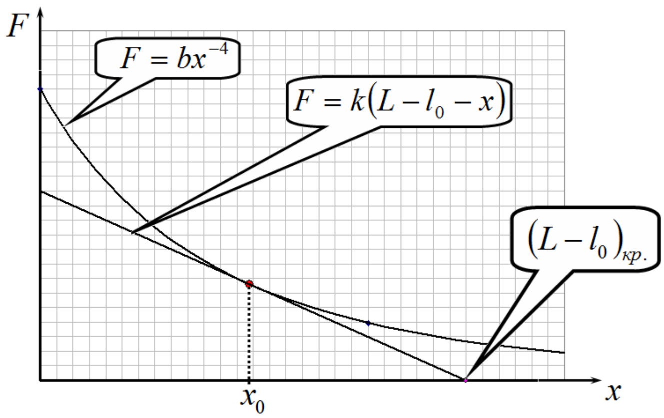
$$F_{маг} = F_{упр} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{x^4} = k\left(L - l_0 - x\right) \tag{12}$$



Это уравнение является уравнением пятой степени, поэтому попытки его аналитического решения обречены на неудачу. Однако нам пока и не требуется решать это уравнение, нам достаточно только проанализировать при каких значениях параметров оно имеет решения[1]. Для такого анализа схематически построим графики зависимостей действующих сил от координаты подвижного магнита x.

Зависимость силы притяжения – та же гладкая монотонно убывающая кривая. Зависимость силы упругости от координаты изображается прямой линией, коэффициент наклона которой равен коэффициенту жесткости пружины. Эта прямая пересекает ось x в точке с координатой $\left(L - l_0\right)$. Таким образом, при изменении L эта прямая смещается параллельно самой себе.

Не сложно заметить, что при малых L прямая (1) не пересекает кривую силы притяжения – в этом случае уравнение (12) корней не имеет! При этом модуль силы притяжения больше модуля силы упругости, поэтому при любом положении магнита. При больших L (прямая 3 на рисунке) имеется две точки пересечения, соответствующие двум положениям равновесия – одно из них устойчивое, второе – не устойчивое. Следовательно, именно в этом случае возможны колебания магнита. Таким образом, «критической» прямой является прямая (2), которая касается графика функции $F_{маг.}(x)$.



Рассмотрим параметры этой прямой. Обозначим координату точки касания x_0.

Воспользуемся «математической подсказкой» и запишем уравнение касательной к графику функции $F = bx^{-4}$:

$$y = \frac{b}{x_0^4}\left(5 - 4\frac{x}{x_0}\right). \tag{13}$$

Сравним эту функцию с функцией, описывающей силу упругости:

---

[1] Не такай уж редкая ситуация для олимпиадных задач: нужно найти не само решение, а только услвовия при которых это решение существует!

$$F = k(L - l_0 - x). \tag{14}$$

Эти функции описывают одну и ту же прямую, поэтому должны быть тождественны во всех точках. Из равенства

$$F = k(L - l_0 - x) = \frac{b}{x_0^4}\left(5 - 4\frac{x}{x_0}\right) = 4\frac{b}{x_0^5}\left(\frac{5}{4}x_0 - \frac{x}{x_0}\right). \tag{15}$$

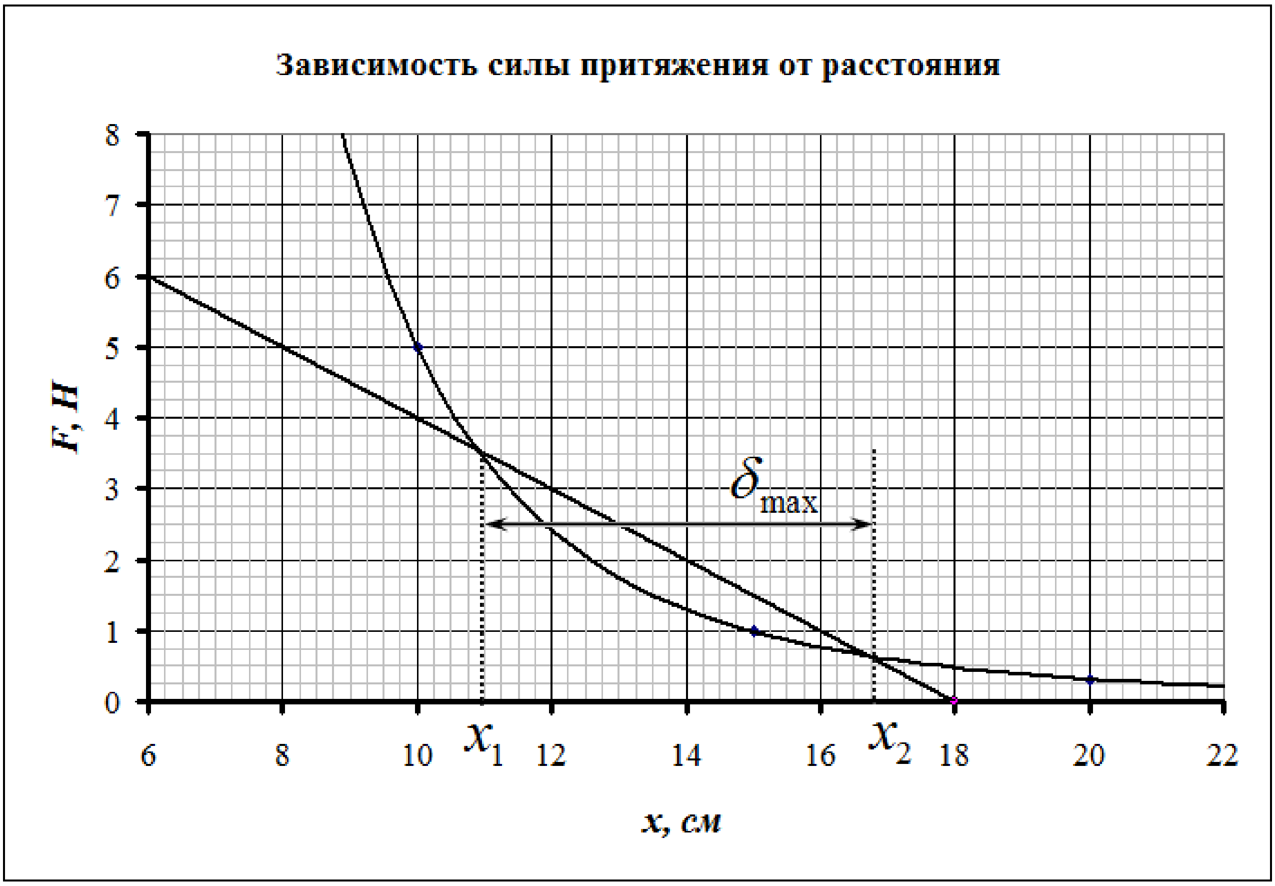
Следует:

$$\begin{cases} k = 4\dfrac{b}{x_0^5} \\ L - l_0 = \dfrac{5}{4}x_0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_0 = \left(\frac{4b}{k}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad L = l_0 + \frac{5}{4}\left(\frac{4b}{k}\right)^{\frac{1}{5}} \tag{16}$$

Итак, колебания возможны, если

$$L > l_0 + \frac{5}{4}\left(\frac{4b}{k}\right)^{\frac{1}{5}}. \tag{17}$$

2.2 На рисунке показано построение зависимости силы упругости от координаты при заданных в условии параметрах.



Эта прямая дважды пресекает график зависимости силы притяжения магнитов от координаты. Из проведенного анализа следует, что этим точкам соответствуют два положения равновесия. Координаты этих точек можно снять непосредственно из графика (с погрешностью порядка 1 мм). Первое положение равновесия $x_1 \approx 11{,}0\,см$, является неустойчивым, второе $x_1 \approx 16{,}8\,см$ - устойчивым. Колебания возможны возле второго положения равновесия. Однако, если координата подвижного магнита станет меньше, чем x_1, то магнит станет неотвратимо приближаться к первому магниту. Поэтому максимальное начальное смещение магнита равно

$$\delta_{\max} = x_2 - x_1 \approx 5{,}8\,см\,. \qquad (18)$$

Погрешность найденного значения оценивается в 0,2 см, что меньше, чем оговоренные в условии 10%, поэтому дальнейшее уточнение не требуется.