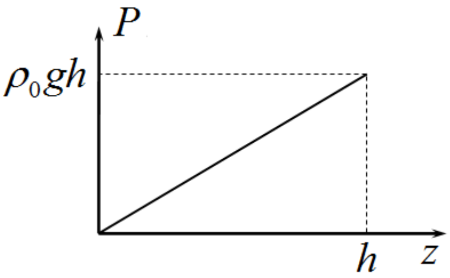
III этап Республиканской олимпиады по физике 2018 года

Решения задач

Задача 9-1. Переменная плотность

Часть 1. Обычная жидкость



1.1 Давление зависит от глубины по закону

$$P = \rho_0 gz \quad (1)$$

График этой зависимости – прямая линия, проходящая через начало координат.

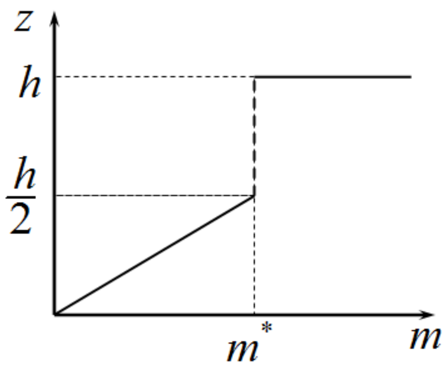
1.2 Сила тяжести трубки уравновешивается силой давления жидкости на нижнее основание

$$mg = P(z)S = \rho_0 gzS \quad \Rightarrow \quad z = \frac{mg}{\rho_0 gS}. \quad (2)$$

Когда трубка погрузится полностью, она сразу утонет. Масса, при которой начнет тонуть,

$$z = \frac{m^* g}{\rho_0 gS} = \frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad m^* = \frac{\rho_0 gSh}{2g}. \quad (3)$$

График зависимости на рисунке.

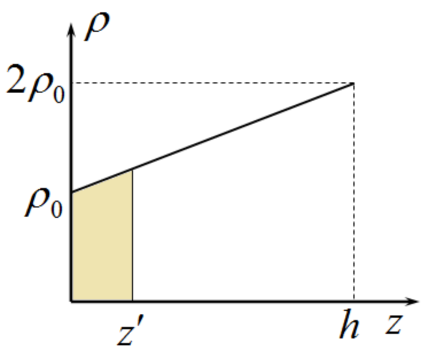


Часть 2. Необычная жидкость.

2.1 Формулу зависимости плотности жидкости от глубины $\rho(z)$

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right). \quad (4)$$

Схематический график этой зависимости на рисунке.



2.2 Гидростатическое давление внутри жидкости на глубине z

$$P = m'gz \quad (5)$$

Где m' масса столба жидкости единичной площади над уровнем z. Эта масса может быть найдена как площадь под графиком $\rho(z)$ (выделена на рис.), или с использованием средней плотности в слое толщиной z. Поэтому искомая зависимость имеет вид

$$P = m'gz = \rho_0 gh\left(1 + \frac{z}{2h}\right)\frac{z}{h} \quad (6)$$

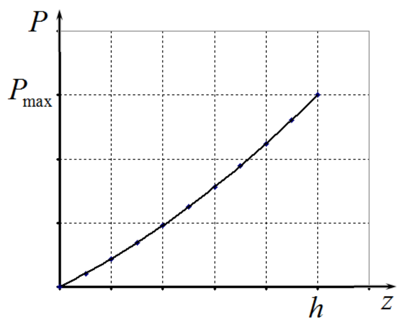


График парабола, проходящая через нуль, максимальное значение при $z = h$: $P_{max} = \frac{3}{2}\rho_0 gh$.

2.3 Массу трубки m_0, при которой она полностью погрузится в жидкость, находится из уравнения

$$m_0 g = P\left(\frac{h}{2}\right)S \quad \Rightarrow \quad m_0 = \frac{S}{g}\rho_0 gh\left(1+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2} = \frac{5}{8}\rho_0 Sh \ . \tag{7}$$

2.4.1 Если верхний конец трубки находится над водой, то справедливо уравнение

$$mg = P(z)S = \rho_0 ghS\left(1+\frac{z}{2h}\right)\frac{z}{h}. \tag{8}$$

Так как $m_0 = \frac{5}{8}\rho_0 Sh \quad \Rightarrow \quad \rho_0 Sh = \frac{8}{5}m_0$, то уравнение (8) преобразуется к виду

$$\frac{m}{m_0} = \frac{8}{5}\left(1+\frac{z}{2h}\right)\frac{z}{h} \quad \Rightarrow \quad y(y+2) = \frac{5}{4}n \tag{9}$$

Итак, при $n<1$ глубина погружение есть положительный корень уравнения (9). Легче рассчитать $n(y)$.

При $m > m_0$ трубка полностью погружена в воду. При этом справедливо уравнение, следующее из закона Архимеда:

$$mg = \rho\left(z-\frac{h}{4}\right)gS\frac{h}{2}. \tag{10}$$

Здесь $\rho\left(z-\frac{h}{4}\right) = \rho_0\left(1+\frac{z-\frac{h}{4}}{h}\right) = \rho_0\left(\frac{3}{4}+y\right)$ - плотность жидкости на уровне середины трубке (средняя плотность вытесненной жидкости). Из уравнения (10) следует

$$mg = \rho_0\left(\frac{3}{4}+y\right)gS\frac{h}{2} = \frac{4}{5}m_0 g\left(\frac{3}{4}+y\right) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{3+4y}{5} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5n-3}{4}. \tag{11}$$

Таким образом, при $n>1$ зависимость глубины погружения от массы линейна.

2.4.2 Трубка полностью погрузится в воду при n_1=1 (по определению)

2.4.4 Центр трубки будет находиться на середине слоя жидкости (при этом $y = \frac{3}{4}$) при $n_2 = \frac{6}{5}$.

2.4.5 Трубка достигнет дна ($y=1$) при $n_3 = \frac{7}{5}$.

График искомой зависимости показан на следующем рисунке.