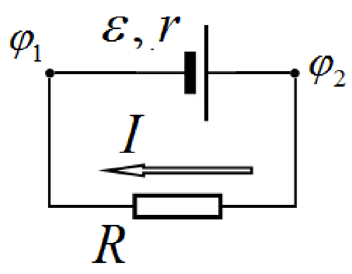
10 Класс
Задание 10-1. Разминка

Задача 1. Кольцевая ЭДС



1.1.1 По закону Ома для полной цепи сила тока в этой цепи равна

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (1)$$

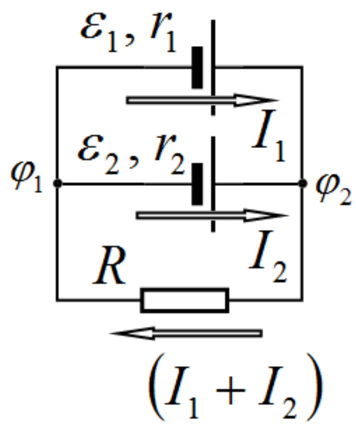
Следовательно, искомая разность потенциалов равна

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = IR = \varepsilon \frac{R}{R + r}. \quad (2)$$

1.1.2 Полученное выражение можно преобразовать к виду

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon \frac{R}{R + r} = \varepsilon \frac{R + r - r}{R + r} = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{R + r} r = \varepsilon - Ir. \quad (3)$$

Впрочем, это соотношение можно записать сразу, сославшись на закон для участка цепи с активным элементом.



1.2.1 Используя соотношение (2) и закон Ома для участка цепи, запишем систему уравнений для сил токов в различных ветвях рассматриваемой цепи

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - I_1 r_1 = (I_1 + I_2)R \\ \varepsilon_2 - I_2 r_2 = (I_1 + I_2)R \end{cases}. \quad (4)$$

Решение этой системы дает искомый результат

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - I_1 r_1 = (I_1 + I_2)R \\ \varepsilon_2 - I_2 r_2 = (I_1 + I_2)R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_1}{r_1} - I_1 = (I_1 + I_2)\dfrac{R}{r_1} \\ \dfrac{\varepsilon_2}{r_2} - I_1 = (I_1 + I_2)\dfrac{R}{r_2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} - (I_1 + I_2) = (I_1 + I_2)\left(\frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2}\right) \Rightarrow I_R = (I_1 + I_2) = \frac{\dfrac{\varepsilon_1}{r_1} + \dfrac{\varepsilon_2}{r_2}}{1 + R\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)} \quad (5)$$

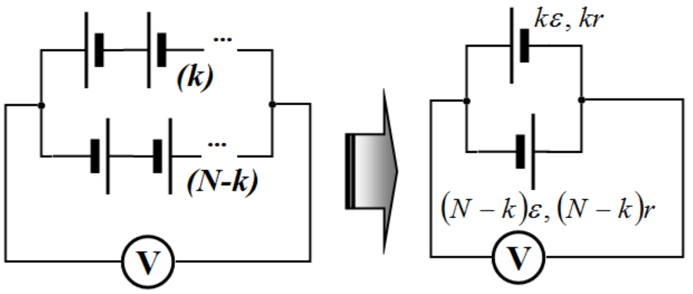
1.2.2 Последнее соотношение можно переписать в виде

$$I_R = (I_1 + I_2) = \frac{\dfrac{\varepsilon_1}{r_1} + \dfrac{\varepsilon_2}{r_2}}{1 + R\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)} = \frac{\left(\dfrac{\varepsilon_1}{r_1} + \dfrac{\varepsilon_2}{r_2}\right)\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)^{-1} + R}, \quad (6)$$

который совпадает с законом Ома для полной цепи $I = \frac{\varepsilon_0}{R + r_0}$. Следовательно, во-первых, два параллельно соединенных источника можно заменить одним, во-вторых, характеристики этого источника описываются не очевидными формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \left(\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2}; \\ r_0 &= \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^{-1} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \end{aligned} . \qquad (7)$$

1.3 При подключении вольтметра к нулевой и k- точкой эквивалентная схема выглядит, как показано на рисунке. Здесь учтено, что при последовательном соединении источников их ЭДС и внутренние сопротивления складываются.



Для расчета напряжения можно воспользоваться полученной формулой (6), в которой следует положить $\varepsilon_1 = k\varepsilon, \quad \varepsilon_2 = -(N-k)\varepsilon, \quad r_1 = kr, \quad r_2 = (N-k)r$. Подстановка этих значений приводит к результату – сила тока через вольтметр, а следовательно и напряжение на нем равно нулю!

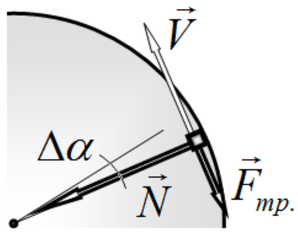
Этот же результат следует и из закона (3), так сила тока в цепи равна $I = \frac{N\varepsilon}{Nr} = \frac{\varepsilon}{r}$, поэтому при любом подключении $\Delta\varphi = k\varepsilon - Ikr = 0$.

Задача 2. Шайба

Изменение скорости шайбы обусловлено силой трения о борт. При движении вдоль прямолинейных бортов отсутствует сила, прижимающая шайбу к борту, поэтому в этом случае трение отсутствует, и скорость шайбы остается постоянной. При движении вдоль закругления появляется сила реакции, действующая на шайбу и сообщающая ей центростремительное ускорение. Изменение модуля скорости шайбы описывается уравнением 2 закона Ньютона в проекции на направление скорости шайбы

$$m\frac{\Delta V}{\Delta t} = -F_{тр.}. \qquad (1)$$

Сила трения связана с силой реакции законом Кулона – Амонтона



$$F_{тр.} = \mu N. \qquad (2)$$

Наконец, сила реакции может быть выражена через центростремительное ускорение

$$\frac{mV^2}{R} = N. \qquad (3)$$

Здесь R - радиус закругления.

Таким образом, изменение модуля скорости описывается уравнением

$$m\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\mu\frac{mV^2}{R}. \qquad (4)$$

Так как нас не интересует зависимость скорости от времени, перейдем в этом уравнении к зависимости изменения скорости от угла поворота. Пусть за малый промежуток времени Δt

шайба прошла путь $\Delta S = V\Delta t$ и при этом повернула на малый угол $\Delta\alpha$. Эти величины связаны геометрическим соотношением

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta S}{R} = \frac{V\Delta t}{R}. \tag{5}$$

С учетом этого выражение, уравнение (4) принимает вид

$$\Delta V = -\mu V \frac{V\Delta t}{R} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = -\mu V \Delta\alpha. \tag{6}$$

Из этого уравнения следует, что относительное изменение скорости шайбы пропорционально углу поворота

$$\frac{\Delta V}{V} = -\mu\Delta\alpha \tag{7}$$

Следовательно, при повороте на некоторый угол α модуль скорости уменьшается в одно и тоже число раз. Так как прохождение каждого закругления соответствует повороту на один и тот же угол $90°$, то и уменьшение скорости на каждом закруглении также будет в одно и то же число раз, то есть

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{V_2}{V_1}. \tag{8}$$

Из этого выражение определяем искомую конечную скорость

$$V_2 = \frac{V_1^2}{V_0}. \tag{9}$$

<u>Дополнение.</u>

1. Проведенные рассуждения можно проиллюстрировать и математическими выкладками. Разобьем угол поворота α на малые интервалы $\Delta\alpha$. Тогда из уравнения (7) следует, что скорости после прохождения k и $(k-1)$ интервалов связаны соотношением

$$V_k = V_{k-1}(1-\mu\Delta\alpha). \tag{10}$$

То есть последовательность V_k является геометрической прогрессией, поэтому каждый член этой последовательности выражается в явном виде следующим образом

$$V_k = V_0(1-\mu\Delta\alpha)^k. \tag{11}$$

Если выразить число шагов, как $k = \dfrac{\alpha}{\Delta\alpha}$, то выражение (11) можно переписать в виде

$$V_k = V_0(1-\mu\Delta\alpha)^{\frac{\alpha}{\Delta\alpha}} = V_0 \exp(-\mu\alpha). \tag{12}$$

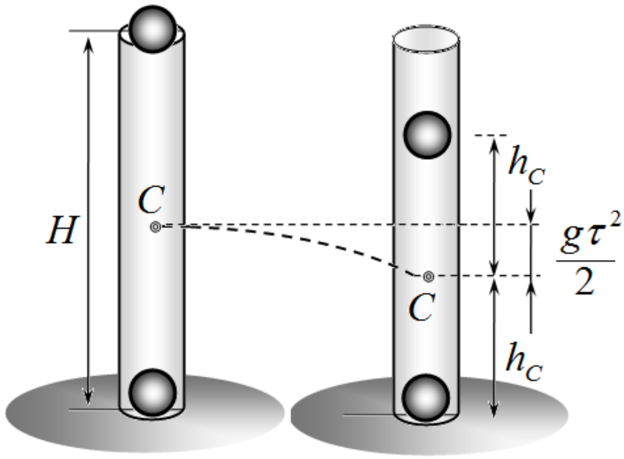
Здесь на последнем шаге использован замечательный предел. Его можно «доказать» следующим образом. Если при малых x справедливо выражение $\exp(x) \approx 1 + x$, то справедливо и обратное $1 + x \approx \exp(x)$. Поэтому $(1+x)^\beta \approx \exp(\beta x)$, откуда и следует формула (12).

Наконец, можно просто проинтегрировать уравнение (7):

$$\frac{dV}{V} = -\mu d\alpha \quad \Rightarrow \quad \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V} = -\mu\int_0^\alpha d\alpha \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{V}{V_0} = -\mu\alpha \quad \Rightarrow \quad V = V_0 \exp(-\mu\alpha)$$

Обратим внимание, что данная формула совпадает с формулой Эйлера, описывающей изменение силы натяжения нити переброшенной через цилиндр.

Задача 3. Шарики в трубе



Силы взаимодействия между шариками (как электростатические, так и упругие в момент столкновения) являются внутренними для системы двух шариков, поэтому они влияют на движение центра масс шариков. Следовательно, центр масс шариков движется вниз с ускорением свободного падения, независимо от того, до столкновения, после столкновения…

Так как массы шариков одинаковы, то центр масс C находится на середине отрезка их соединяющего.

За время τ центр масс двух шариков опустится на расстояние $\frac{g\tau^2}{2}$ и окажется на высоте

$$h_C = \frac{H}{2} - \frac{g\tau^2}{2}. \qquad (1)$$

Здесь $\frac{H}{2}$ - высота центра масс в начальный момент времени (в момент отпускания).

Так как нижний шарик в это момент оказался на дне сосуда, то второй шарик окажется на высоте в 2 раза большей высоты центра масс, т.е.

$$h_1 = 2h_C = H - g\tau^2. \qquad (2)$$

<u>Примечание</u>. Исходные данные позволяют заключить, что в рассматриваемый момент времени второй шарик будет находиться выше.

Задача 2 Теплопроводность

1.1 Для расчетов потоков теплоты надо просто подставить численные значения в заданную формулу и провести расчет

Для серебра

$$q_{Ag} = \lambda S \frac{\Delta T}{h} = 8{,}58 \cdot 10^4\, Вт \qquad (1)$$

Для свинца

$$q_{Зи} = \lambda S \frac{\Delta T}{h} = 7{,}02 \cdot 10^3\, Вт \qquad (2)$$

1.2 Так как коэффициент теплопроводности постоянен в установившемся режиме температуру изменяется по линейному законы. Поэтому при расчетах можно считать, что среднее значение изменения температуры равно $\delta T = \frac{1}{2}\Delta T$. После этого опять считаем

Для серебра

$$Q_{Ag} = \frac{1}{2} cm\Delta t = \frac{1}{2} c\rho Sh\Delta t = 2{,}47 \cdot 10^6\, Дж \qquad (3)$$

Для свинца

$$Q_{Ag} = \frac{1}{2} c\rho Sh\Delta t = 1{,}43 \cdot 10^6\, Дж \qquad (4)$$