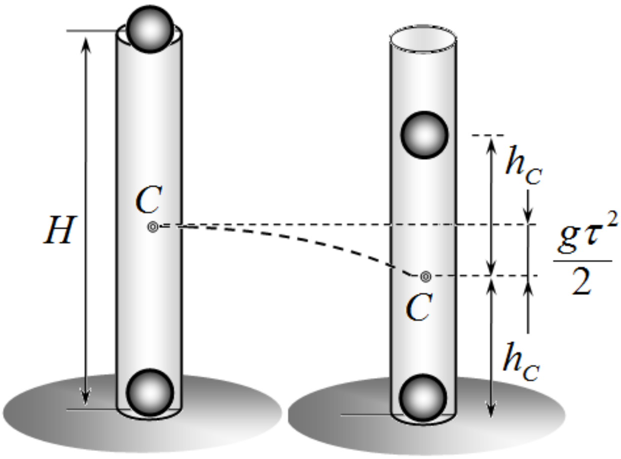
Задача 3. Шарики в трубе



Силы взаимодействия между шариками (как электростатические, так и упругие в момент столкновения) являются внутренними для системы двух шариков, поэтому они влияют на движение центра масс шариков. Следовательно, центр масс шариков движется вниз с ускорением свободного падения, независимо от того, до столкновения, после столкновения…

Так как массы шариков одинаковы, то центр масс C находится на середине отрезка их соединяющего.

За время τ центр масс двух шариков опустится на расстояние $\frac{g\tau^2}{2}$ и окажется на высоте

$$h_C = \frac{H}{2} - \frac{g\tau^2}{2}. \qquad (1)$$

Здесь $\frac{H}{2}$ - высота центра масс в начальный момент времени (в момент отпускания).

Так как нижний шарик в это момент оказался на дне сосуда, то второй шарик окажется на высоте в 2 раза большей высоты центра масс, т.е.

$$h_1 = 2h_C = H - g\tau^2. \qquad (2)$$

<u>Примечание</u>. Исходные данные позволяют заключить, что в рассматриваемый момент времени второй шарик будет находиться выше.

Задача 2 Теплопроводность

1.1 Для расчетов потоков теплоты надо просто подставить численные значения в заданную формулу и провести расчет

Для серебра

$$q_{Ag} = \lambda S \frac{\Delta T}{h} = 8{,}58 \cdot 10^4\ Вт \qquad (1)$$

Для свинца

$$q_{Зи} = \lambda S \frac{\Delta T}{h} = 7{,}02 \cdot 10^3\ Вт \qquad (2)$$

1.2 Так как коэффициент теплопроводности постоянен в установившемся режиме температуру изменяется по линейному законы. Поэтому при расчетах можно считать, что среднее значение изменения температуры равно $\delta T = \frac{1}{2}\Delta T$. После этого опять считаем

Для серебра

$$Q_{Ag} = \frac{1}{2} cm\Delta t = \frac{1}{2} c\rho Sh\Delta t = 2{,}47 \cdot 10^6\ Дж \qquad (3)$$

Для свинца

$$Q_{Ag} = \frac{1}{2} c\rho Sh\Delta t = 1{,}43 \cdot 10^6\ Дж \qquad (4)$$

1.3 Для решения этого пункта воспользуемся упорно навязываемой аналогией с законами постоянного тока. Так для каждой пластины можно ввести и рассчитать тепловое сопротивление

$$R = \frac{1}{\lambda}\frac{h}{S} \tag{5}$$

Так как пластины соединены последовательно (теплота проходит через одну, потом через другую), то общее сопротивление равно сумме сопротивлений. Поэтому поток теплоты через сдвоенные пластины будет равен

$$q_1 = q_2 = \frac{\Delta T}{\dfrac{h}{\lambda_{Ag}S} + \dfrac{h}{\lambda_{Pb}S}} \tag{6}$$

Этой формуле можно придать интересный вид

$$q_1 = q_2 = \left(\frac{1}{q_{Ag}} + \frac{1}{q_{Pb}}\right)^{-1} \tag{7}$$

Расчеты по этой формуле дают значение

$$q_1 = q_2 = 6{,}49 \cdot 10^3\, Bm \tag{8}$$

Как видно поток определяется потоком через плохо проводящий слой.

Для расчета количества теплоты, потраченное на нагревание необходимо сначала найти распределение температуры, т.е. решить следующие пункты задачи.

1-4 – 1.6 Распределение температуры в каждом слое, по-прежнему, линейное. Поэтому достаточно найти температуру стыка. Опять воспользуемся аналогией с протеканием электрического тока. Обозначим свойства вещества примыкающего к холодной стороне индексом «х», а к горячей стороне индексом «г». Тогда можно записать (здесь T_z - температура стыка):

$$T_z - T_0 = qR_x = \frac{\Delta T}{\dfrac{h}{\lambda_{Ag}S} + \dfrac{h}{\lambda_{Pb}S}} \cdot \frac{h}{\lambda_x S} = \frac{T_1 - T_0}{\dfrac{1}{\lambda_x} + \dfrac{1}{\lambda_г}}\frac{1}{\lambda_x} \tag{9}$$

Откуда следует, что

$$T_z = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\dfrac{1}{\lambda_x} + \dfrac{1}{\lambda_г}}\frac{1}{\lambda_x} \tag{10}$$

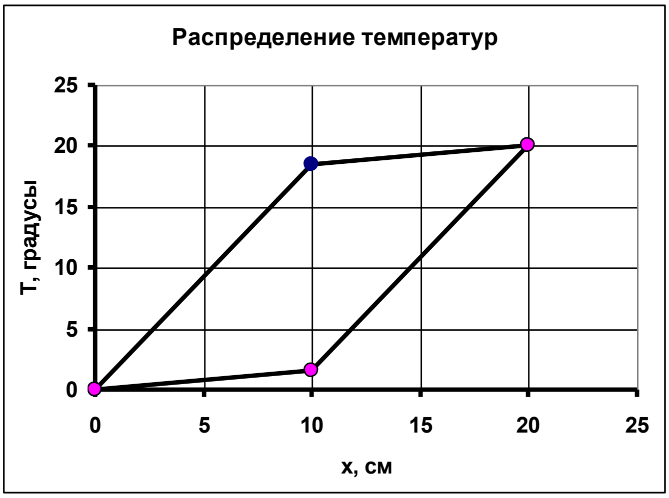
Проведем расчеты.

В первом случае ($Pb \to Ag$)

$$T_{z1} = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\dfrac{1}{\lambda_{Ag}} + \dfrac{1}{\lambda_{Pb}}}\frac{1}{\lambda_{Pb}} = 18{,}5°C\,. \tag{11}$$

Во втором случае ($Ag \to Pb$)

$$T_{z2} = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\dfrac{1}{\lambda_{Ag}} + \dfrac{1}{\lambda_{Pb}}}\frac{1}{\lambda_{Ag}} = 1{,}5°C\,. \tag{12}$$



Во втором случае можно было просто вычислить $T_{z2} = \Delta T - T_{z1}$. Графики зависимостей температуры от координаты показаны на рисунке.

Видно, что основное «падение

температуры» происходит на свинцовой пластине. Также по графику видно, что основное различие в количестве теплоты возникает из-за того, что серебряная пластина в первом случае нагревается больше.
Для расчетов теплот учтем, что пластина, примыкающая к холодной стороне, в среднем нагрелась на $\frac{1}{2}T_Z$; а вторая - на величину $\frac{1}{2}(T_z+T_1)$.
Поэтому количество теплоты, которой пойдет на нагревания будет равно:
В первом случае ($Pb \to Ag$):

$$Q_1=\frac{1}{2}c_{Pb}\rho_{Pb}ShT_Z+\frac{1}{2}c_{Ag}\rho_{Ag}Sh(T_Z+T_1)=6{,}07\cdot 10^6\ Дж \tag{13}$$

Во втором случае ($Ag \to Pb$)

$$Q_1=\frac{1}{2}c_{Ag}\rho_{Ag}ShT_Z+\frac{1}{2}c_{Pb}\rho_{Pb}Sh(T_Z+T_1)=1{,}73\cdot 10^6\ Дж\ . \tag{14}$$

Часть 2. Воздушная пластина.

В данной части задачи все температуры следует рассчитывать в шкале Кельвина.
2.1 Для определения вида зависимости длины свободного пробега от указанных параметров, заметим, что движущаяся молекула заметает на своем пути площадь равную πd^2. На длине свободно пробега в цилиндре с указной площадью поперечного сечения и высотой равной длине свободного пробега в среднем должна находиться одна молекула. Поэтому можно записать

$$\pi d^2\langle l\rangle n=1 \quad\Rightarrow\quad \langle l\rangle=\frac{1}{\pi d^2 n}\ . \tag{15}$$

2.2 Подставляя найденную зависимость в формулу для теплопроводности, получим выражение

$$\lambda=\frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle\rho c_V=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\cdot\frac{1}{\pi d^2 n}\cdot nm\cdot C_V M\ . \tag{16}$$

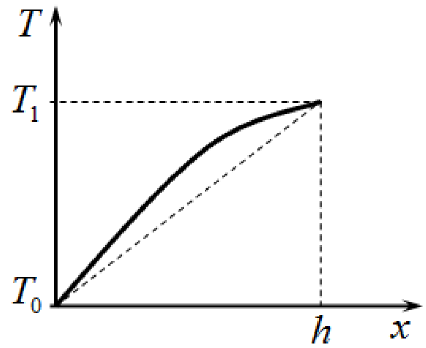
Из которого следует, что коэффициент теплопроводности воздуха пропорционален корню квадратному из абсолютной температуры. Т.е. показатель степени $z=\frac{1}{2}$. Важно также отметить, что теплопроводность не зависит от плотности (концентрации).

Экспериментальные данные показывают, что при температурах близких к комнатным показатель степени ближе к единице. Поэтому выбранная модель также имеет право на существование.

2.3 Используя формулу для потока теплоты, получаем, что поток теплоты через воздушную прослойку (в приближении постоянства теплопроводности) равен

$$\tilde{q}_a=\lambda S\frac{\Delta T}{h}=4{,}80\,Вт \tag{17}$$

2.4 Так как теплопроводность воздуха возрастает с ростом температуры, то график температурного профиля будет выгнут вверх. Действительно, в тех местах, где теплопроводность больше, градиент температуры меньше.



2.5 Так как теплопроводность воздуха зависит от температуры, то она изменяется и при переходе от одной точки к другой. Поэтому закон теплопроводности Фурье следует записывать только для тонких слоев (т.е. в дифференциальной форме). Выразим зависимость теплопроводности от температуры посредством формулы

$$\lambda = \lambda_0 \frac{T}{T_0}. \qquad (18)$$

И запишем уравнение Фурье для тонкого слоя воздуха Δx:

$$q = \lambda_0 \frac{T}{T_0} \frac{\Delta T}{\Delta x} S. \qquad (19)$$

Воспользуемся очевидной подсказкой и запишем

$$q\Delta x = \frac{\lambda_0 S}{2T_0} \Delta\left(T^2\right) \qquad (20)$$

Теперь легко просуммировать по всем слоям:

$$ql = \frac{\lambda_0 S}{2T_0}\left(T_1^2 - T_0^2\right) \qquad (21)$$

Откуда получаем окончательно для потока теплоты

$$q = \frac{\lambda_0 S}{2T_0 l}\left(T_1^2 - T_0^2\right). \qquad (22)$$

Расчет дает следующее численное значение: $q_a = 4{,}98 Bm$, что несколько больше, чем получено ранее в приближенном расчете.

2.6 Так как объем воздуха не изменяется, то все полученная теплота пойдет на увеличение внутренней энергии воздуха. В установившемся режиме теплопередачи температура будет изменяться от точки к точке, постоянным будет оставаться давление! Поэтому выразим внутреннюю энергию воздуха через его давление:

$$U = \frac{5}{2} R\nu T = \frac{5}{2} PV. \qquad (23)$$

Следовательно, изменение внутренней энергии воздуха (и равное ему количество полученной теплоты) выражается через изменение давления

$$Q = \Delta U = \frac{5}{3} V\Delta P. \qquad (24)$$

Таким образом, нам необходимо рассчитать установившееся давление. Для этого воспользуемся условием постоянства числа молекул воздуха. Для этого разобьем воздушную пластину на тонкие слои Δx_i. Концентрацию частиц в каждом слое можно выразить из уравнения состояние газа

$$n_i = \frac{P}{kT_i}. \qquad (25)$$

Тогда общее число молекул можно получить, если просуммировать числа частиц во всех слоях

$$N = \sum_i \frac{PS}{kT_i} \Delta x_i. \qquad (26)$$

Это же число можно выразить через начальные условия

$$N = \frac{P_0 S l}{kT_0}. \qquad (27)$$

Таким образом, для определения давления получаем уравнение

$$P\sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{P_0 l}{T_0}. \tag{28}$$

Прямое вычисление суммы требует расчета распределения температуры и последующего интегрирования. Можно поступить проще: выразим Δx_i из уравнения теплопроводности (19):

$$q = \lambda_0 \frac{T}{T_0}\frac{\Delta T}{\Delta x} S \quad \Rightarrow \quad \Delta x_i = \lambda_0 \frac{T_i}{T_0}\frac{\Delta T_i}{q} S \tag{29}$$

И после подстановки получим

$$\sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \sum_i \frac{1}{T_i}\lambda_0 \frac{T_i}{T_0}\frac{\Delta T_i}{q} S = \frac{\lambda_0 S}{qT_0}\sum_i \Delta T_i = \frac{\lambda_0 S}{qT_0}(T_1 - T_0). \tag{30}$$

Подставим найденное выражение для потока теплоты (22)

$$\sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{\lambda_0 S}{qT_0}(T_1 - T_0) = \frac{\lambda_0 S}{\frac{\lambda_0 S}{2T_0 l}\left(T_1^2 - T_0^2\right)T_0}(T_1 - T_0) == \frac{2l}{(T_1 + T_0)}. \tag{31}$$

Теперь из уравнения (28) находим

$$P\sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{P_0}{T_0} \quad \Rightarrow \quad P = P_0 \frac{T_1 + T_0}{2T_0} \tag{32}$$

Наконец, подставляем в формула для количества теплоты

$$Q = \frac{5}{2}V\Delta P = \frac{5}{2}P_0 V\left(\frac{T_1 + T_0}{2T_0} - 1\right) = \frac{5}{4}P_0 V\frac{\Delta T}{T_0} \tag{33}$$

Численное значение поглощенной теплоты равно $Q = 915\,Дж$.

Задача 3 Опыты Ш. Кулона (Решение)

1. Свойства нити подвеса.

1.1 В описании Ш. Кулона приведена масса нити m, она легко выражается через объем и плотность серебра

$$m = \rho_{Ag} L \frac{\pi d^2}{4}. \tag{1}$$

Из этой формулы легко выразить диаметр нити:

$$d = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho_{Ag} L}}. \tag{2}$$

При численных расчетах следует все параметры выразить в единицах системы СИ:

$$d = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho_{Ag} L}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{1}{16} \cdot 64{,}8 \cdot 10^{-6}\,кг}{\pi \cdot 10{,}5 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3} \cdot 28 \cdot 2{,}707 \cdot 10^{-2}\,м}} = 2{,}55 \cdot 10^{-5}\,м \tag{3}$$

Менее трех сотых миллиметра!

1.2 Модуль кручения определяется по формуле

$$G = \frac{M}{\varphi} = \frac{Fr}{\varphi}. \tag{4}$$

Подстановка численных значений с переводом в систему СИ дает следующее значение