$$P\sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{P_0 l}{T_0}\,. \qquad (28)$$

Прямое вычисление суммы требует расчета распределения температуры и последующего интегрирования. Можно поступить проще: выразим Δx_i из уравнения теплопроводности (19):

$$q = \lambda_0 \frac{T}{T_0}\frac{\Delta T}{\Delta x} S \quad \Rightarrow \quad \Delta x_i = \lambda_0 \frac{T_i}{T_0}\frac{\Delta T_i}{q} S \qquad (29)$$

И после подстановки получим

$$\sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \sum_i \frac{1}{T_i}\lambda_0 \frac{T_i}{T_0}\frac{\Delta T_i}{q} S = \frac{\lambda_0 S}{qT_0}\sum_i \Delta T_i = \frac{\lambda_0 S}{qT_0}\left(T_1 - T_0\right). \qquad (30)$$

Подставим найденное выражение для потока теплоты (22)

$$\sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{\lambda_0 S}{qT_0}\left(T_1 - T_0\right) = \frac{\lambda_0 S}{\dfrac{\lambda_0 S}{2T_0 l}\left(T_1^2 - T_0^2\right)T_0}\left(T_1 - T_0\right) == \frac{2l}{\left(T_1 + T_0\right)}\,. \qquad (31)$$

Теперь из уравнения (28) находим

$$P\sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{P_0}{T_0} \quad \Rightarrow \quad P = P_0 \frac{T_1 + T_0}{2T_0} \qquad (32)$$

Наконец, подставляем в формула для количества теплоты

$$Q = \frac{5}{2}V\Delta P = \frac{5}{2}P_0 V\left(\frac{T_1 + T_0}{2T_0} - 1\right) = \frac{5}{4}P_0 V\frac{\Delta T}{T_0} \qquad (33)$$

Численное значение поглощенной теплоты равно $Q = 915\,Дж$.

Задача 3 Опыты Ш. Кулона (Решение)

1. Свойства нити подвеса.

1.1 В описании Ш. Кулона приведена масса нити m, она легко выражается через объем и плотность серебра

$$m = \rho_{Ag} L \frac{\pi d^2}{4}\,. \qquad (1)$$

Из этой формулы легко выразить диаметр нити:

$$d = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho_{Ag} L}}\,. \qquad (2)$$

При численных расчетах следует все параметры выразить в единицах системы СИ:

$$d = \sqrt{\frac{4m}{\pi\rho_{Ag}L}} = \sqrt{\frac{4\cdot\frac{1}{16}\cdot 64{,}8\cdot 10^{-6}\,кг}{\pi\cdot 10{,}5\cdot 10^3\,\frac{кг}{м^3}\cdot 28\cdot 2{,}707\cdot 10^{-2}\,м}} = 2{,}55\cdot 10^{-5}\,м \qquad (3)$$

Менее трех сотых миллиметра!

1.2 Модуль кручения определяется по формуле

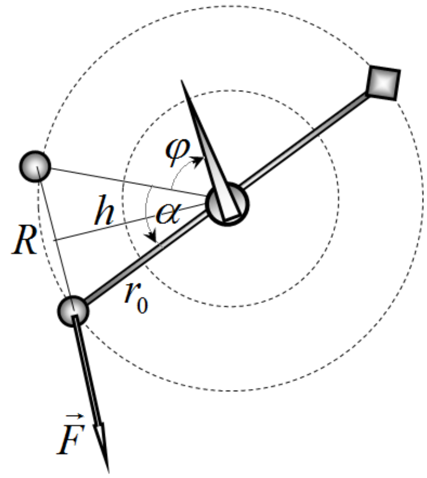
$$G = \frac{M}{\varphi} = \frac{Fr}{\varphi}\,. \qquad (4)$$

Подстановка численных значений с переводом в систему СИ дает следующее значение

$$G = \frac{Fr}{\varphi} = \frac{\frac{1}{340} \cdot 64{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}81 Н \cdot 4 \cdot 2{,}707 \cdot 10^{-2} м}{2\pi} = 8{,}055 \cdot 10^{-9} Н \cdot м = 8{,}1 \cdot 10^{-9} Н \cdot м \qquad (5)$$

2. Фундаментальный закон электричества.

2.1 Решение этой части задачи начнем с цитаты из использованного мемуара: «*Расстояние между двумя шариками, когда они удалены друг от друга действием взаимного отталкивания, измеряется в точности не углом, который они образуют, а хордой дуги, которая соединяет их центры. Так же и плечо в крайнем положении, где проявляется действие, измеряется не половиной длины дуги, или радиусом, а косинусом половины угла…*»



Воспользуемся подсказкой самого Шарля Кулона, рассмотрим условия равновесия коромысла крутильных весов. На рисунке показана геометрия опыта и направление силы взаимодействия между шариками $\vec{F}$. Из рисунка следует, что расстояние между шариками равно

$$R = 2r_0 \sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (6)$$

Плечо силы взаимодействия

$$h = r_0 \cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (7)$$

Угол закручивания нити

$$\varphi_\Sigma = \alpha + \varphi. \qquad (8)$$

Условие равновесия коромысла весов имеет вид

$$G(\alpha + \varphi) = Fr_0 \cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (9)$$

Следовательно, сила взаимодействия может быть рассчитана по формуле

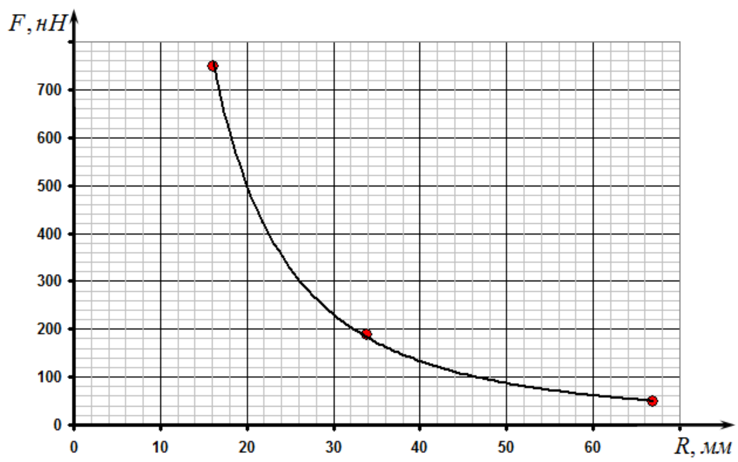
$$F = \frac{G(\alpha + \varphi)}{r_0 \cos\frac{\alpha}{2}}. \qquad (10)$$

Расстояние между шариками рассчитывается по формуле (6).

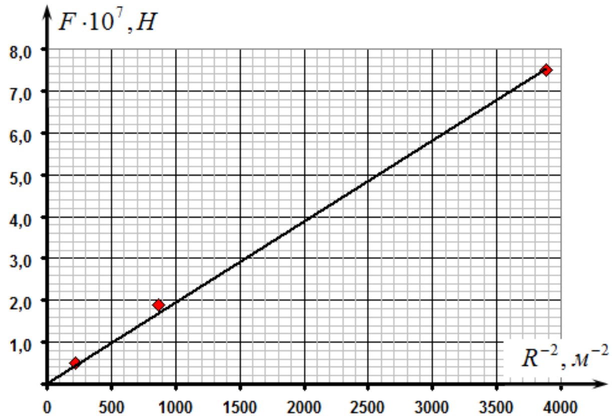
Результаты расчетов по этим формулам приведены в Таблице (1). График этой функции показан на рисунке.

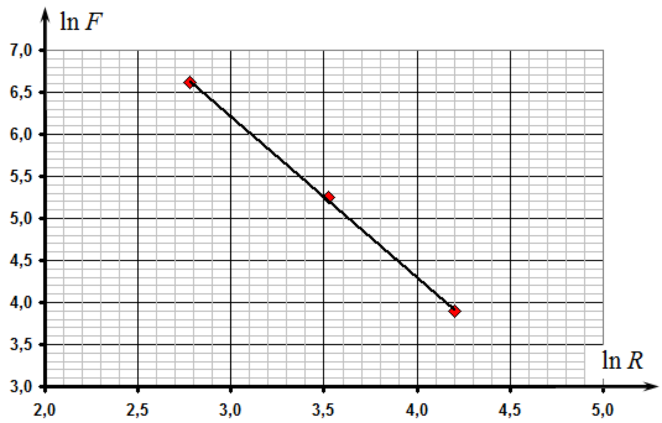
Таблица 1. Расчет сил и расстояний.

N	α°	φ°	F, нН	R, мм
1	36	0	49,1	66,9
2	18	126	189,3	33,9
3	8,5	567	749,3	16,0



2.2 Для доказательства закона Кулона ($F = \dfrac{A}{R^2}$) следует провести линеаризацию зависимости силы от расстояния. Эту линеаризацию можно провести различными способами. например, построить зависимость $F\left(R^{-2}\right)$. Наиболее предпочтительной линеаризацией является построение графика в логарифмическом масштабе $\ln F\,(\ln R)$. В этом случае коэффициент наклона будет равен показателю степени в зависимости $F = AR^n$. На рисунке приведены графики обеих линеаризованных зависимостей.





Действительно, коэффициент наклона в логарифмической зависимости примерно равен -1,9, что с учетом неизбежных погрешностей измерений можно принять равным -2.

Также видно. что зависимость $F\left(R^{-2}\right)$ близка к линейной, поэтому эта зависимость также подтверждает закон Кулона.

2.3 В системе СИ закон Кулона имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R^2}.$$

С помощью этой формулы можно вычислить заряды шариков. Для повышения точности следует провести усреднение по трем результатам измерений. Один из возможных вариантов такого усреднения – использование зависимости $F\left(R^{-2}\right)$. В этой зависимости коэффициент наклона равен

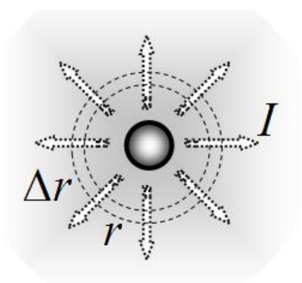
$$a = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} = 1{,}94 \cdot 10^{-10}\ Н \cdot м^2, \qquad (11)$$

Откуда следует, что

$$q = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 a} = \sqrt{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}94 \cdot 10^{-10}} = 1{,}5 \cdot 10^{-10}\, Кл\,. \qquad (12)$$

3. Утечка заряда.

Понятно, что уменьшение угла отклонения связано с утечкой зарядов с шариков. Поэтому в данной части задачи необходимо найти ответы на два вопроса: первый, как зависит заряд шарика от времени; второй – как связано изменение угла отклонения с изменением заряда.



Можно считать, что шарик находится в однородной слабопроводящей среде, а электрический ток протекает от шарика до бесконечности.

В этом случае разность потенциалов равна потенциалу шарика

$$\Delta\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} \tag{13}$$

Здесь обозначено b - радиус шарика (чтобы не путать с R - так мы обозначим сопротивление среды).

Для расчета сопротивления среды ее следует разделить на тонкие сферические слои. Сопротивление отдельного слоя радиуса r и толщины Δr равно

$$\Delta R = \rho \frac{\Delta r}{4\pi r^2}. \tag{14}$$

Так как радиально растекающийся ток протекает последовательно через слои, то общее сопротивление равно сумме сопротивлений всех слоев

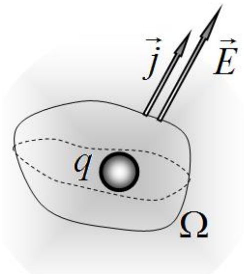
$$R = \sum_i \rho \frac{\Delta r_i}{4\pi r_i^2}. \tag{15}$$

Для выполнения суммирования (точнее интегрирования) можно сослаться на традиционный способ вычисления потенциала поля, создаваемого точечным источником – здесь сумма имеет тот же вид, поэтому

$$R = \sum_i \rho \frac{\Delta r_i}{4\pi r_i^2} = \frac{\rho}{4\pi b}. \tag{16}$$

Таким образом, находим, что сила тока утечки равна

$$I = \frac{\Delta\phi}{R} = \frac{q}{\rho\varepsilon_0}. \tag{17}$$



Примечание. Этот же результат можно получить более изящным способом, используя теорему Гаусса. Мысленно окружим один из шариков произвольной замкнутой поверхностью Ω. Сила тока, стекающего с шарика равна потоку вектора плотности тока $\vec{j}$ через эту поверхность $I = \Phi_j$. По закону Ома в дифференциальной форме плотность пока связана с напряженностью электрического поля соотношением $\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$. Поэтому поток вектора плотности тока связан с потоком вектора напряженности таким же соотношением: $\Phi_j = \frac{1}{\rho}\Phi_E$.

Поток вектора напряженности поля определяется теоремой Гаусса $\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$. Окончательно получаем $I = \Phi_j = \frac{1}{\rho}\Phi_E = \frac{q}{\rho\varepsilon_0}$. Полученное соотношение перепишем в виде

$$I = \frac{q}{\rho\varepsilon_0} = -\frac{\Delta q}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta q}{q} = -\frac{1}{\rho\varepsilon_0}\Delta t. \tag{18}$$

Рассмотрим теперь, как связано угла смещения шарика с изменением зарядов на шариках.

Сила взаимодействия выражается через угол смещения α посредством соотношения (10). Используя закон Кулона, можем записать

$$F = \frac{G(\alpha+\varphi)}{r_0 \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\left(2r_0 \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad q^2 = B\frac{(\alpha+\varphi)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \tag{19}$$

где B - некоторая постоянная величина. Эта формула выражает связь между углом смещения и зарядами шариков. Обозначим функцию $f(\alpha)=\dfrac{(\alpha+\varphi)\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. Изменение заряда определяется изменением этой функции. По-видимому, в данном случае проще провести численные расчеты изменения этой функции $\Delta f = f(\alpha-\Delta\alpha)-f(\alpha)$, хотя можно воспользоваться и приближенными формулами (вычислением производных). Учитывая, что изменения заряда мало, запишем

$$q^2 = Bf(\alpha) \quad \Rightarrow$$
$$2q\Delta q = B\Delta f \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta q}{q}=\frac{1}{2}\frac{\Delta f}{f(\alpha)} \tag{20}$$

Численный расчет относительного изменения заряда (при $\alpha = 30°, \Delta\alpha = -1°, \quad \varphi = 50°$) дает значение:

$$\frac{\Delta q}{q}=\frac{1}{2}\frac{\Delta f}{f(\alpha)} = -0{,}039\,, \tag{21}$$

Примечание. Для оценки можно приближенно считать, что расстояние между шариками равно длине дуги между ними $r_0\alpha$, а плечо силы равно r_0. Тогда условие равновесия примет вид

$$G(\alpha+\varphi)=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2\alpha^2}r_0\alpha\,.$$

Тогда проводя аналогичные (20) преобразования, получим

$$q^2 = B_1\alpha(\alpha+\varphi) \quad \Rightarrow$$
$$2q\Delta q = B_1(2\alpha+\varphi)\Delta\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta q}{q}=\frac{1}{2}\frac{2\alpha+\varphi}{\alpha(\alpha+\varphi)}\Delta\alpha = -0{,}023\,. \tag{22}$$

Теперь вернемся к формуле (18), из которой можно выразить искомое удельное сопротивление воздуха

$$\rho = -\frac{\Delta t}{\varepsilon_0\left(\dfrac{\Delta q}{q}\right)} = \frac{3\cdot 60}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}039} \approx 5{,}2\cdot 10^{14}\,\text{Ом}\cdot\text{м}\,. \tag{23}$$