Задание 11-1. Шарики на спице.

Задача 1. 1 шарик.

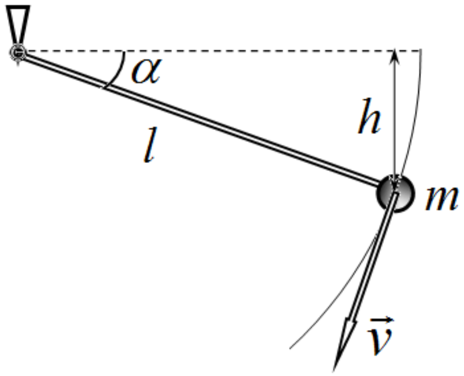


Рис. 1

1.1 Проще всего найти зависимость скорости шарика от угла отклонения с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgl\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gl\sin\alpha}\,. \qquad (1)$$

1.2 Так как стержень жесткий, то в нем возможны силы, направленные перпендикулярно стержню. Поэтому, прежде всего, следует рассмотреть наличие такой нормальной силы $\vec{N}$ действующей на шарик.
Для нахождения неизвестных сил можно использовать 2 закон Ньютона. Так как мы нашли зависимость скорости от угла поворота, то не составляет труда найти тангенциальное ускорение шарика (т.е. проекцию этого ускорения на вектор скорости). Для этого достаточно вычислить производную от вектора скорости

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \omega\frac{dv}{d\alpha} = \frac{v}{l}\frac{dv}{d\alpha} = \frac{1}{2l}\frac{d\left(v^2\right)}{d\alpha}$$

При выводе этого соотношения использовано правило вычисления производной от сложной функции. Так как $v^2 = 2gl\sin\alpha$, то

$$a_\tau = \frac{1}{2l}\frac{d\left(v^2\right)}{d\alpha} = g\cos\alpha \qquad (2)$$

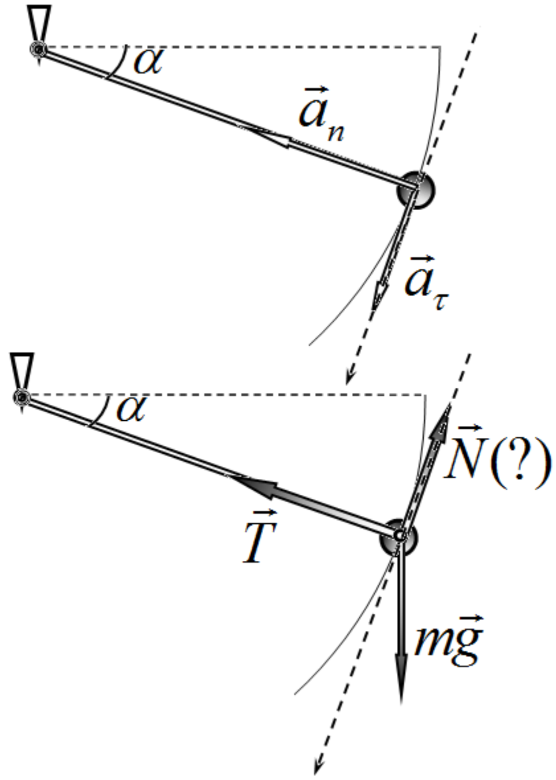


Рис.2

<u>Примечание.</u> Величину тангенциального ускорения можно найти и из простого кинематического соотношения

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}, \qquad (3)$$

Рассматривая малое смещение шарика на угол $\Delta\alpha$, и пренебрегая изменением ускорения на этом участке можно считать, что путь, пройденный шариком, равен $S = l\Delta\alpha$. Тогда из формулы (3) следует, что $a_\tau = \dfrac{\Delta\left(v^2\right)}{2l\Delta\alpha}$.

Запишем уравнение 2 закона Ньютона для шарика в проекции на вектор скорости

$$ma_\tau = mg\cos\alpha - N \qquad (4)$$

Из этого уравнения с учетом найденного ускорения (2) следует, что в данном случае нормальная составляющая силы реакции отсутствует $N = 0$.

Таким образом, мы показали, что сила, действующая на шарик со стороны стержня, направлена вдоль стержня. Для ее определения запишем уравнение 2 закона Ньютона для шарика в проекции на направление стержня:

$$ma_n = T - mg\sin\alpha \tag{5}$$

В данном уравнении проекция ускорения перпендикулярна вектору скорости, поэтому это есть нормальное ускорения, которое, как известно, определяется по формуле

$$a_n = \frac{v^2}{l} = 2g\sin\alpha \tag{6}$$

Здесь опять использовано выражение для величины модуля скорости (1).
Из формул (5)-(6) следует, что

$$T = 3mg\sin\alpha . \tag{7}$$

1.3 Проекции ускорения можно найти различными способами. Мы используем разложение вектора ускорения на тангенциальную и нормальную составляющие, которые уже найдены. Из рис. 3 следует, что проекции ускорения на указанные оси координат равны

$$\begin{aligned} a_x &= -a_n\cos\alpha - a_\tau\sin\alpha \\ a_y &= -a_n\sin\alpha + a_\tau\cos\alpha \end{aligned}. \tag{8}$$

Используя найденные значения тангенциального (2) и нормального (6) ускорений, получим

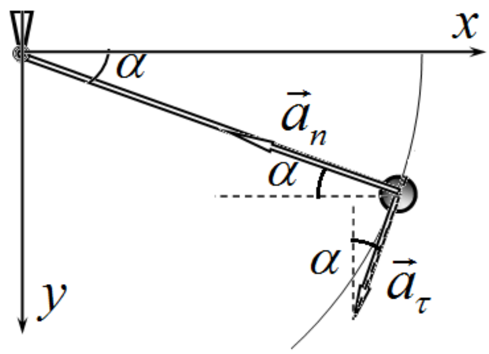


Рис. 3

$$\begin{aligned} a_x &= -a_n\cos\alpha - a_\tau\sin\alpha = -2g\sin\alpha\cos\alpha - g\cos\alpha\sin\alpha = -3g\sin\alpha\cos\alpha \\ a_y &= -a_n\sin\alpha + a_\tau\cos\alpha = -2g\sin\alpha\sin\alpha + g\cos\alpha\cos\alpha = -2g\sin^2\alpha + g\cos^2\alpha \end{aligned} \tag{8}$$

Эти же выражения можно получить из уравнений 2 закона Ньютона в проекциях на оси координат.

1.4 Фактически функции (8) определяют уравнение годографа вектора ускорения в параметрической форме. Однако, предадим этим функциям несколько иной вид, используя тригонометрические формулы двойного угла:

$$a_x = -3g\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{3}{2}g\sin 2\alpha . \tag{9}$$

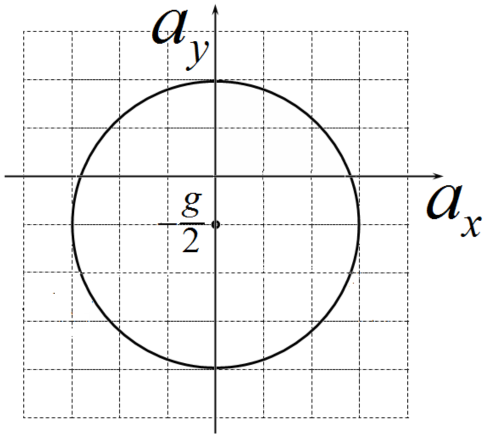
$$a_y = -2g\sin^2\alpha + g\cos^2\alpha = g - 3g\sin^2\alpha = g - 3g\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) = \frac{3}{2}g\cos 2\alpha - \frac{1}{2}g . \tag{10}$$

Теперь не сложно заметить, что эти уравнения задают окружность:

$$a_x^2 + \left(a_y + \frac{1}{2}g\right)^2 = \left(\frac{3}{2}g\right)^2 \tag{11}$$

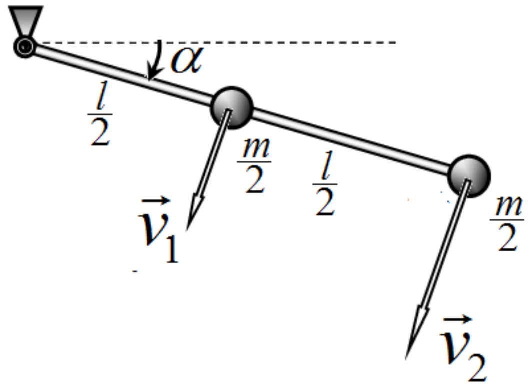
Эта окружность показана и является годографом вектора ускорения.

Она показана на рис. 4. Отметим, что угол α изменяется в пределах от 0 до π, поэтому конец вектора ускорения описывает полную окружность .



1.5 Центр окружности смещен вдоль оси a_y на величину $\frac{g}{2}$, радиус окружности равен $\frac{3}{2}g$.
Следовательно, в системе отсчета, движущейся вниз с постоянным ускорением $\frac{g}{2}$, модуль ускорения будет постоянным и равным $\frac{3}{2}g$.

Задача 2. 2 шарика



2.1 Так как стержень жесткий, то шарики будут двигаться с одинаковыми угловыми скоростями ω. Поэтому скорости шариков будут равны

$$v_1 = \omega\frac{l}{2}, \quad v_2 = \omega l. \tag{12}$$

Запишем закон сохранения энергии для рассматриваемой системы

$$\frac{1}{2}\frac{m}{2}\omega^2 l^2\left(\frac{1}{4}+1\right) = \frac{m}{2}gl\left(\frac{1}{2}+1\right)\sin\alpha \tag{13}$$

Из этого уравнения следует, что угловая скорость вращения стержня зависит от угла отклонения по закону

$$\omega = \sqrt{\frac{12}{5}\frac{g}{l}\sin\alpha}\,. \tag{14}$$

2.2 Для расчета ускорения воспользуемся кинематическим соотношением (3), которое применим для малого начального смещения на малый угол α. Для крайнего шарика запишем

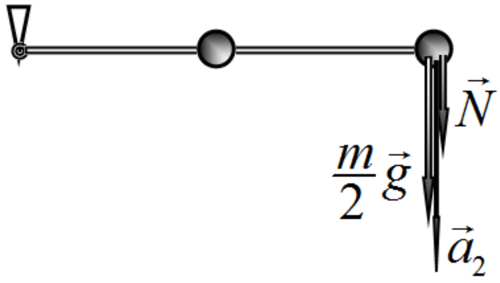
$$l\alpha = \frac{v^2(\alpha)}{2a_2} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{\frac{12}{5}\frac{g}{l}\sin\alpha\cdot l^2}{2l\alpha} = \frac{6}{5}g \tag{15}$$

Аналогично для первого шарика

$$\frac{l}{2}\alpha = \frac{v^2(\alpha)}{2a_1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{\frac{12}{5}\frac{g}{l}\sin\alpha\cdot\frac{l^2}{4}}{2\frac{l}{2}\alpha} = \frac{3}{5}g \tag{16}$$

Впрочем, очевидно, что ускорение первого шарика в два раза меньше. Отметим, что эти выражения могут быть получены прямым дифференцированием функции (14) с последующим переходом от углового ускорения стержня к линейным ускорениям шариков.

2.3 Обратим внимание, что в начальный момент времени ускорение крайнего шарика превышает ускорение свободного падения! Следовательно, со стороны стержня на шарик действует сила, направленная вертикально вниз. Силы реакции направленной вдоль стержня в данном положении нет, так как скорость шарика равна нулю. Записывая уравнение 2 закона Ньютона для крайнего шарика, получим



$$\frac{m}{2}a_2 = \frac{m}{2}g + N \quad \Rightarrow \quad N = \frac{m}{2}\left(a_2 - g\right) = \frac{mg}{10}. \qquad (17)$$

Таким образом, в данной конфигурации внутри стержня возникают силы упругости, направленные перпендикулярно стержню.

Задача n. n шариков.

Решение этой задачи полностью аналогично решению предыдущей. Поэтому можно сократить комментарии к решению.

3.1 Записываем закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2}\frac{m}{n}l^2\omega^2\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)=\frac{m}{n}gl\left(\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{2}{n}\right)+\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots\left(\frac{n}{n}\right)\right)\sin\alpha \quad \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\frac{l^2\omega^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{gl}{n}\sin\alpha\sum_{k=1}^{n}k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{l^2\omega^2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{gl}{n}\sin\alpha\frac{n(n+1)}{2} \qquad (18)$$

Так как по условию $n >> 1$, то в формулах для сумм можно оставить только высшие степени, поэтому получим

$$\frac{1}{2}\frac{l^2\omega^2}{n^2}\frac{n^3}{3}=\frac{gl}{n}\frac{n^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega=\sqrt{3\frac{g}{l}\sin\alpha} \qquad (19)$$

Это же выражение модно получить гораздо проще из уравнения динамики вращательного движения.

3.2 Ускорение $k-$того шарика рассчитываем по прежней методике

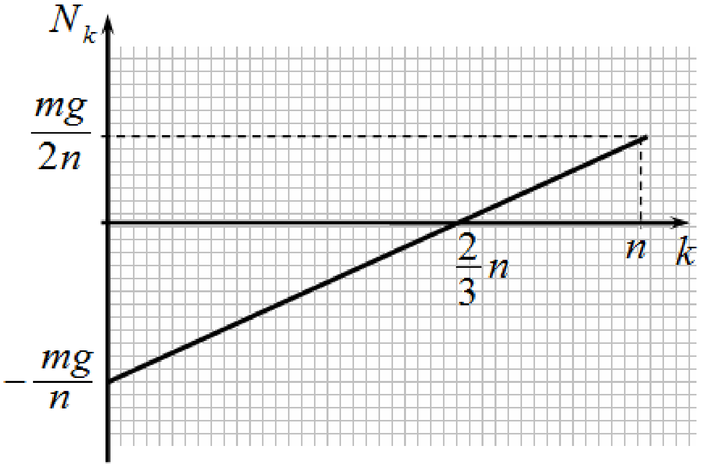
$$\left(\frac{l}{n}k\right)\alpha=\frac{v_k^2(\alpha)}{2a_k} \quad \Rightarrow \quad a_k=\frac{3\frac{g}{l}\sin\alpha\cdot\left(\frac{l}{n}k\right)^2}{2\left(\frac{l}{n}k\right)\alpha}=\frac{3}{2}g\frac{k}{n}. \qquad (20)$$

3.3 Так как ускорения шариков в начальный момент времени отличаются от ускорения свободного падения, то на эти шарики со стороны стержня действуют силы реакции направленные вертикально (положительное направлении – вниз). Их величины также находим из уравнения 2 закона Ньютона

$$\frac{m}{n}a_k=\frac{m}{n}g+N_k \quad \Rightarrow \quad N_k=\frac{m}{n}g\left(\frac{3}{2}\frac{k}{n}-1\right) \qquad (21)$$

Как следует из полученной формулы при $\frac{k}{n} < \frac{2}{3}$ эти силы направлены вверх, далее – вниз.

На рисунке показана зависимость этих сил от номера шарика.



3.4 Природа этих сил – силы упругости, возникающие при малой деформации стержня.

3.5 Как было показано в этой задаче, при ускоренном вращательном движении массивного стержня в нем возникают силы упругости, направленные поперек стержня. Следовательно, такие же силы возникают и при падении трубы. Они-то ее и ломают!
В последней части задачи показано, что направление поперечных сил меняется на противоположное на одной трети длины стержня, поэтому, скорее всего на этом же расстоянии и происходит разлом.