Задача 11-3. Давление света. (Решение)

1. Свойства электромагнитных волн.

1.1 В условии задачи подсказано, что средние плотности энергии электрического и магнитного полей волны равны. Поэтому вычислим усредненные значения плотностей этих энергий. Мгновенное значение плотности энергии электрического поля описывается функцией

$$w_E(t) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E(t)\right)^2 = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\cos^2 \omega t \qquad (1)$$

Усреднение по промежутку времени, значительно превышающему период световых колебаний, дает

$$\langle w_E \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}. \qquad (2)$$

При выводе учтено, что среднее значение квадрата косинуса равно $\langle \cos^2 t \rangle = \frac{1}{2}$.

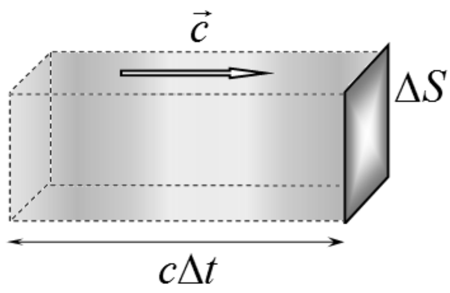
Аналогичные рассуждения дают аналогичный результат:

$$\langle w_B \rangle = \left\langle \frac{B_0^2}{2\mu_0}\cos^2 \omega t \right\rangle = \frac{B_0^2}{4\mu_0}. \qquad (3)$$

Из равенства этих величин следует очень простое и красиво соотношение между амплитудами полей

$$\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} = \frac{B_0^2}{4\mu_0} \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} B_0 = cB_0. \qquad (4)$$

1.2 Рассмотрим небольшую прямоугольную площадку площади ΔS на которую нормально падает электромагнитная волна. На этой площадке, как на основании построим параллелепипед длиной $c\Delta t$. Вся энергия волны, заключенная в этом параллелепипеде за время Δt успеет проскочить через выделенную площадку. Поэтому за время Δt через площадку пройдет энергия равная



$$\Delta W = (w_E + w_B)\Delta S \cdot c\Delta t. \qquad (5)$$

Усредняя по времени, получим $\Delta W = \langle w_E + w_B \rangle \Delta S \cdot c\Delta t$. Тогда интенсивность волны (по определению) будет равна

$$I = \frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t} = c\langle w_E + w_B \rangle. \qquad (6)$$

Принимая во внимание полученные выражения для средних плотностей энергии электрического и магнитного полей, получим выражение для интенсивности волны:

$$I = c\langle w_E + w_B \rangle = 2c\langle w_E \rangle = c\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}. \qquad (7)$$

2. Движение электронов в металле и их электрическое сопротивление.

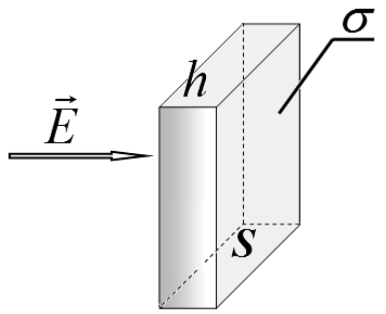
2.1 Считайте, что каждый атом меди отдает один электрон в облако свободных электронов. Молярная масса меди $M_{Cu} = 63{,}5\dfrac{г}{моль}$, плотность меди $\rho_{Cu} = 8{,}92\dfrac{г}{м^3}$, постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}\, моль^{-1}$

2.1 Концентрация свободных электронов равна концентрации атомов в меди, которая рассчитывается элементарно:

$$n = \frac{\rho_{Cu}}{m_{Cu}} = \frac{\rho_{Cu}}{M_{Cu}}N_A = \frac{8{,}92\cdot 10^3\,\frac{кг}{м^3}}{63{,}5\cdot 10^{-3}\,\frac{кг}{моль}}6{,}02\cdot 10^{23}\,\frac{1}{моль} = 8{,}46\cdot 10^{28}\, м^{-3}\,. \tag{8}$$

2.2 Напряженность электрического поля внутри металла равна нулю, так как внешнее поле компенсируется полем индуцированных зарядов. В данном случае индуцированные заряды локализуются на поверхности пластины, поэтому поверхностная плотность индуцированных зарядов связана с напряженностью создаваемого поля следующим соотношением

$$\sigma = \varepsilon_0 E \tag{9}$$



Здесь E - напряженность внешнего поля и она же напряженность поля индуцированных зарядов. Если площадь части пластинки равна S, то число электронов, находящихся на этой площадке равно $N' = \dfrac{\sigma S}{e}$ (e - заряд электрона), в то время как общее число свободных электронов в пластинке $N = nSh$. Таким образом, доля электронов, которые под действием внешнего поля переместились на поверхность, равна

$$\eta = \frac{N'}{N} = \frac{\sigma}{enh} = \frac{\varepsilon_0 E}{enh}\,. \tag{10}$$

Подставляя численные значения параметров этой формулы (заметим, что $E = 30\dfrac{кВ}{см} = 3{,}0\cdot 10^6\,\dfrac{В}{м}$), получим

$$\eta = \frac{\varepsilon_0 E}{enh} = \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}0\cdot 10^6}{1{,}60\cdot 10^{-19}\cdot 8{,}46\cdot 10^{28}\cdot 1{,}0\cdot 10^{-2}} = 2{,}0\cdot 10^{-13}\,. \tag{10}$$

Очень маленькая доля!

2.3 При установившемся значении силы тока электроны движутся с постоянной скоростью (конечно, в среднем), в этом случае сила, действующая на электрон со стороны электрического поля, уравновешивается силой сопротивления

$$eE = \beta v\,. \tag{11}$$

Отсюда следует, что средняя скорость движения электронов равна

$$v = \frac{eE}{\beta}\,. \tag{12}$$

Тогда плотность тока равна

$$j = env = \frac{e^2 n}{\beta}E\,. \tag{13}$$

Эта формула выражает закон Ома в дифференциальной форме, который традиционно записывается в виде

$$j = \frac{1}{\rho} E \,. \tag{14}$$

Сравнивая эти выражения, находим, что искомый и не совсем понятный коэффициент может быть рассчитан по вполне измеряемым параметрам

$$\beta = \frac{\rho}{ne^2} \,. \tag{15}$$

3. Давление света на поверхность металла.

3.1 Уравнение движение свободного электрона по второму закону Ньютона имеет вид

$$ma = eE_0 \cos \omega t \,. \tag{16}$$

m - масса электрона, a - его ускорение.

Из этого уравнения следует, что скорость электрона зависит от времени по закону

$$v(t) = \frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t \tag{17}$$

Вектор скорости лежит в той же плоскости, что и вектор напряженности электрического поля.

3.2 Так как вектор скорости электрона и вектор индукции магнитного поля взаимно перпендикулярны, сила Лоренца равна произведению модулей этих векторов, т.е.

$$F_Л = evB = e\frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t \cdot B_0 \cos \omega t \,. \tag{18}$$

Среднее по времени значение этой силы равно нулю, так как $\langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = 0$

Итак, в этом случае

$$\langle F_Л \rangle = 0 \,. \tag{19}$$

3.3 При наличии силы сопротивления уравнение движение электрона имеет вид

$$ma = eE_0 \cos \omega t - \beta v \,. \tag{20}$$

Используя подсказку, запишем

$$v(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \tag{21}$$

Ускорение электрона находим, вычисляя производную от этой функции

$$a = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t \,. \tag{22}$$

Подставим эти функции в уравнение (20)

$$-C_1 m\omega \sin \omega t + C_2 m\omega \cos \omega t = eE_0 \cos \omega t - C_1 \beta \cos \omega t - C_2 \beta \sin \omega t \,. \tag{23}$$

Так как это выражение должно быть справедливым в любой момент времени, можно приравнять коэффициенты, стоящие «при синусах и косинусах», в результате чего получаем систему уравнений для определения коэффициентов функции (21)

$$\begin{cases} -C_1 m\omega = -C_2 \beta \\ C_2 m\omega = eE_0 - C_1 \beta \end{cases} . \tag{24}$$

Решение этой системы элементарно:

$$C_2 = eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2 + \beta^2}; \quad C_1 = eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \,. \tag{25}$$

Подставляя эти выражение в функцию (21), получим искомую функцию

$$v(t) = eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \cos \omega t + eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2 + \beta^2} \sin \omega t \,. \tag{26}$$

3.4 Так как в выражении для скорости присутствует слагаемое изменяющееся по закону косинуса, среднее значение силы Лоренца, действующее на один электрон, оказывается отличным от нуля. Действительно,

$$\left\langle F_{Л}^{(1)} \right\rangle = \left\langle evB \right\rangle = \left\langle e\left(eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2+\beta^2}\cos\omega t + eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2+\beta^2}\sin\omega t \right) B_0 \cos\omega t \right\rangle = \\ = e^2 \frac{E_0 B_0}{2} \frac{\beta}{(m\omega)^2+\beta^2} = e^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2+\beta^2} . \quad (27)$$

Легко показать, что эта сила направлена по направлению распространения волны.

3.5 Так как в пластинке содержится $N = nhS$ электронов, то суммарная средняя сила, действующая на пластинку оказывается равной

$$\left\langle F_{Л} \right\rangle = nhSe^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2+\beta^2} . \quad (28)$$

3.6 Поглощение волны происходит только потому, что на электроны действует тормозящая сила (равносильно – потому, что есть электрическое сопротивление). Мощность поглощенной одним электроном энергии есть мощность силы сопротивления

$$p^{(1)} = F_{сопр.} v = \beta v^2 \quad (29)$$

Проводя усреднение по времени, получим

$$\left\langle p_1 \right\rangle = \left\langle \beta v^2 \right\rangle = \left\langle \beta \left(eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2+\beta^2}\cos\omega t + eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2+\beta^2}\sin\omega t \right)^2 \right\rangle = \\ = \frac{(eE_0)^2}{2} \frac{\beta}{(m\omega)^2+\beta^2} \quad (28)$$

При выводе учтено, что $\left\langle \cos^2 \omega t \right\rangle = \left\langle \sin^2 \omega t \right\rangle = \frac{1}{2}$, $\left\langle \cos\omega t \cdot \sin\omega t \right\rangle = 0$

Мощность энергии, поглощенной всеми электронами равна

$$P_{погл} = N\left\langle p_1 \right\rangle = nhS \frac{(eE_0)^2}{2} \frac{\beta}{(m\omega)^2+\beta^2} . \quad (29)$$

Мощность энергии падающей на пластинку равна

$$P_{пад.} = IS = I = c\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} S . \quad (30)$$

Следовательно, коэффициент поглощения волны равен

$$K = \frac{P_{погл}}{P_{пад}} = \frac{nhe^2}{c\varepsilon_0} \frac{\beta}{(m\omega)^2+\beta^2} . \quad (31)$$

3.7 Давление света равно отношению силы (28) к площади пластинки

$$p = \frac{\left\langle F_{Л}^{(1)} \right\rangle}{S} = nhe^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2+\beta^2} . \quad (32)$$

Поэтому осталось выразить эту формулу через интенсивность падающей волны и коэффициент поглощения, что делается достаточно просто: просто переставим слагаемые в формуле (28)

$$p = \frac{\left\langle F_{Л}^{(1)} \right\rangle}{S} = nhSe^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2+\beta^2} = \left(\frac{nhSe^2}{c\varepsilon_0} \frac{\beta}{(m\omega)^2+\beta^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} c \right) \frac{1}{c} = K\frac{I}{c} . \quad (33)$$

Заметим, что в точности такое же выражение для давления света следует и из квантовой теории.