Задача 11-2 Собственные колебания.

Часть 1. Один движущийся шарик.

Уравнение движения шарика имеет вид

$$ma = -\gamma x \tag{1}$$

Где x - смещение шарика от положения равновесия, a - его ускорение.
Это уравнение является уравнением гармонических колебаний с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}\,. \tag{2}$$

Часть 2. Два движущихся шарика.

2.1 Уравнения движения шариков следуют из второго закона Ньютона и закона Гука

$$\begin{aligned} ma_1 &= -\gamma x_1 + \gamma(x_2 - x_1) \\ ma_2 &= -\gamma(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{3}$$

Или

$$\begin{aligned} a_1 &= -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\ a_2 &= \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 \end{aligned}. \tag{4}$$

Чтобы найти частоты собственных колебаний представим решение уравнений (4) в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos\omega t \\ x_2 &= A_2 \cos\omega t \end{aligned}. \tag{5}$$

Где A_1, A_2 - амплитуды колебаний первого и второго шариков. Подстановка функций (5) в уравнения (4) дает уравнения для амплитуд

$$\begin{aligned} -\omega^2 A_1 &= -2\omega_0^2 A_1 + \omega_0^2 A_2 \\ -\omega^2 A_2 &= \omega_0^2 A_1 - \omega_0^2 A_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Выразим из обоих уравнений (6) отношение амплитуд

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2 - \omega^2}, \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}. \tag{7}$$

Чтобы система уравнений (6) была совместна необходимо, чтобы найденные отношения (7) были равны, что дает уравнение для определения собственных частот колебаний

$$\frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2-z} = 1 - z\,. \tag{8}$$

Здесь обозначено $z = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$. Решая это уравнение, получим

$$\begin{aligned} &(2-z)(1-z) = 1 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 3z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \\ &z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad z_{21} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, собственные частоты собственных колебаний данной системы равны

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \quad \omega_2 = \omega_0\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,. \tag{10}$$

Отношения амплитуд колебаний шариков при этих колебаниях будут соответственно равны

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = 1 - z; \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{11}$$

Часть 3. Длинная цепочка.

3.1 Уравнение движения произвольного шарика имеет вид

$$ma_k = \gamma(x_{k+1} - x_k) - \gamma(x_k - x_{k-1}). \qquad (12)$$

Или

$$a_k = \omega_0^2(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}). \qquad (13)$$

Для $k = 0$ следует положить $x_0 = 0$. Для крайнего шарика можно отбросить первое слагаемое в уравнении (12). Но проще и красивее распространить уравнение (13) на фиктивный $(N+1)$ шарик, причем считать, что $x_{N+1} = x_N$.

3.2 Последуем по пути, подсказанному «гуманитарной помощью».
Подставим пробное решение $x_k = A_k \cos\omega t$ в уравнение (13). После сокращения получим уравнение для амплитуд

$$-\omega^2 A_k = \omega_0^2(A_{k+1} - 2A_k + A_{k-1}), \qquad (14)$$

Которое перепишем в симметричном виде

$$A_{k+1} - \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)A_k + A_{k-1} = 0. \qquad (15)$$

Теперь подставим пробное решение для этого уравнения $A_k = A\sin(k\varphi)$.
Обоснование такого предсказания заключается в том, что фактически свободные колебания являются стоячими волнами на цепочке. Кроме того, синус выбран, чтобы удовлетворить условию $x_0 = 0$.
Указанная подстановка дает:

$$\sin((k+1)\varphi) + \sin((k-1)\varphi) = \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\sin(k\varphi). \qquad (16)$$

Используя известную тригонометрическую формулу для суммы синусов, получим

$$\begin{aligned}
&2\sin\frac{(k+1)\varphi + (k-1)\varphi}{2}\cos\frac{(k+1)\varphi - (k-1)\varphi}{2} = \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\sin(k\varphi)\\
&2\sin(k\varphi)\cos\varphi = \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\sin(k\varphi)\\
&\cos\varphi = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}
\end{aligned} \qquad (17)$$

Теперь подставим пробное решение во второе граничное условие $x_{N+1} = x_N$ и преобразуем его

$$\begin{aligned}
&\sin((N+1)\varphi) = \sin(N\varphi) \quad \Rightarrow \quad \sin((N+1)\varphi) - \sin(N\varphi) = 0 \quad \Rightarrow\\
&2\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\varphi\right)\cos\frac{\varphi}{2} = 0 \quad \Rightarrow
\end{aligned} \qquad (18)$$

Так $\cos\dfrac{\varphi}{2}$ отличен от нуля (иначе цепочка не колеблется!), то

$$\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\varphi\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad (2N+1)\varphi_j = 2\pi j \quad (j = 1,2,3...) \qquad (19)$$

Итак, параметр φ может принимать только дискретный ряд значений

$$\varphi_j = \frac{2\pi}{2N+1} j \qquad (20)$$

Наконец, с помощью формулы (17) находим частоты собственных колебаний

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} = 1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_j = 2\omega_0 \sin\frac{\varphi_j}{2},$$

После подстановки выражения (20), получаем окончательную формулу для частот колебаний

$$\omega_j = 2\omega_0 \sin\frac{\varphi_j}{2} = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{2N+1} j\right) \tag{21}$$

В этой формуле j изменяется в пределах от 1 до N, т.к. дальнейшее увеличение этого параметра приведет к повторению частот. Поэтому число собственных частот равно числу подвижных шариков, т.е. N