Задание 1. Термоскоп Галилея. Решение.

Часть 1. Конструирование и градуировка в идеальном случае.

1.1 – 1.2 Масса воздуха в термоскопе остается постоянной, поэтому для этого воздуха справедливо уравнение состояния Клапейрона (для состояний при максимальной и минимальной температурах):

$$\frac{P_0(V_1+Sl)}{T_{\max}} = \frac{(P_0-\rho gl)V_1}{T_{\min}}, \quad (1)$$

Где $Sl = \frac{\pi d^2}{4} l$ - внутренний объем трубки.

Из уравнения (1) находим:

$$\frac{(V_1+Sl)}{V_1} = \frac{(P_0-\rho gl)}{P_0}\frac{T_{\max}}{T_{\min}} \Rightarrow 1+\frac{Sl}{V_1} = (1-\alpha)\frac{T_{\max}}{T_{\min}} \Rightarrow$$
$$\frac{Sl}{V_1} = (1-\alpha)\frac{T_{\max}}{T_{\min}} - 1 \Rightarrow V_1 = \frac{Sl}{(1-\alpha)\frac{T_{\max}}{T_{\min}} - 1}. \quad (2)$$

Численные расчеты приводят к результатам

$$Sl = \frac{\pi d^2}{4} l = \frac{\pi \cdot 0{,}5^2}{4} 50 = 9{,}82\ см^3$$
$$\alpha = \frac{\rho gl}{P_0} = \frac{1{,}0\cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}50}{1{,}0\cdot 10^5} = 5{,}0\cdot 10^{-3}$$
$$V_1 = \frac{Sl}{(1-\alpha)\frac{T_{\max}}{T_{\min}} - 1} = \frac{9{,}82 см^3}{(1-0{,}050)\frac{40+273}{10+273} - 1} = 194\ см^3. \quad (3)$$
$$\beta = \frac{Sl}{V_1+Sl} = 0{,}048$$

1.3 Запишем уравнение Клапейрона для воздуха в трубке, используя начальное и промежуточное состояния

$$\frac{P_0(V_1+Sl)}{T_{\max}} = \frac{(P_0-\rho gh)(V_1+Sl-Sh)}{T}. \quad (4)$$

Перепишем его в «безразмерной» форме

$$\frac{T}{T_{\max}} = \left(1-\frac{\rho gl}{P_0}\cdot\frac{h}{l}\right)\left(1-\frac{Sl}{(V_1+Sl)}\cdot\frac{h}{l}\right) \Rightarrow$$
$$\frac{T}{T_{\max}} = (1-\alpha z)(1-\beta z). \quad (5)$$

Это уравнение является квадратным относительно величины z:

$$az^2+bz+c=0$$
$$a=\alpha\beta;\quad b=-(\alpha+\beta):\quad c = 1-\frac{T}{T_{\max}} = 1-\frac{t+273}{313}, \quad (5)$$

которое может быть решено по известной формуле

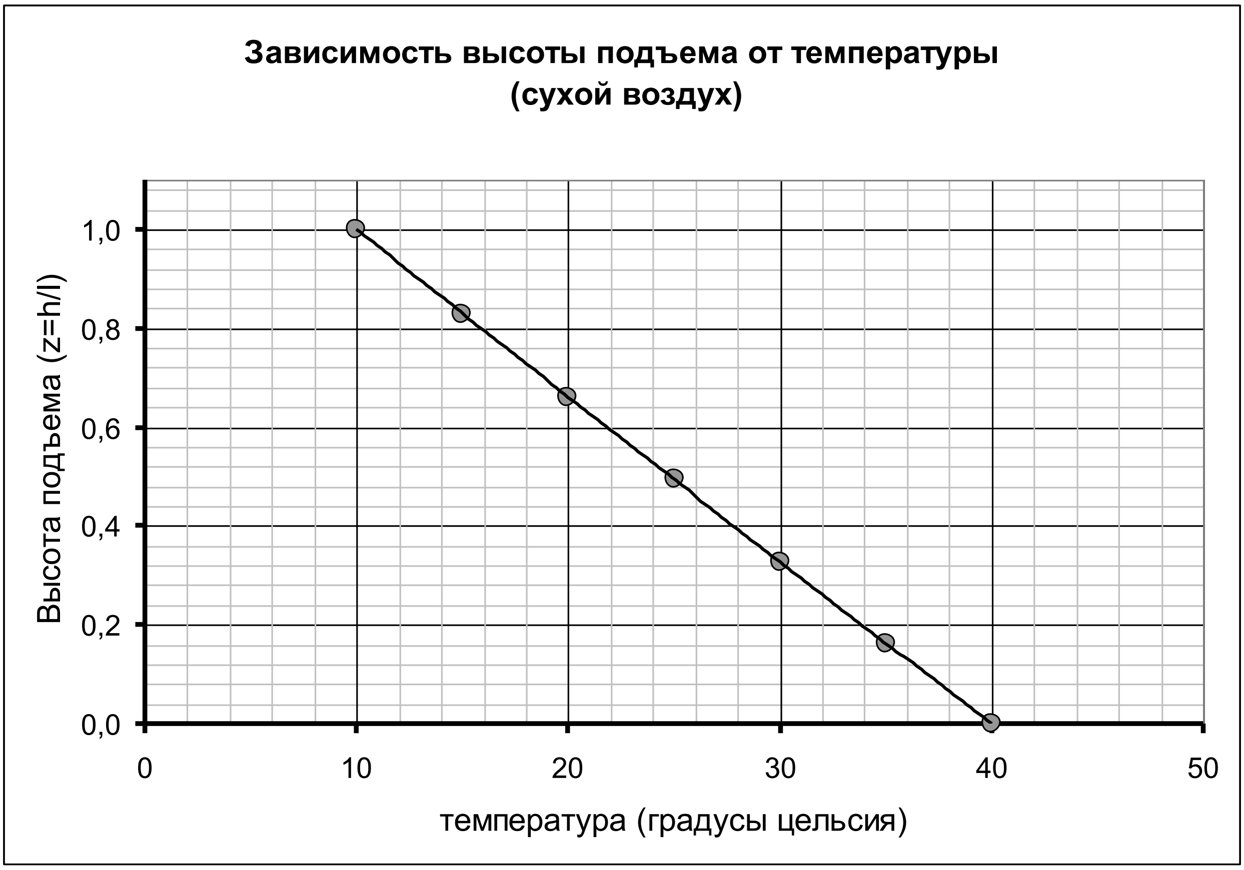
$$z = \frac{(\alpha+\beta) - \sqrt{(\alpha+\beta) + 4\alpha\beta\left(\frac{40-t}{313}\right)}}{2\alpha\beta}. \qquad (6)$$

Отметим, что необходимо выбрать знак «минус» перед корнем.

1.4 Результаты расчетов приведены в таблице 1 и на графике.

Таблица 1. Зависимость высоты подъема от температуры без учета влажности воздуха.

t°C	***a***	***b***	***c***	***z***
10,00	0,00241	-0,09826	0,09585	**1,000**
15,00	0,00241	-0,09826	0,07987	**0,830**
20,00	0,00241	-0,09826	0,06390	**0,661**
25,00	0,00241	-0,09826	0,04792	**0,494**
30,00	0,00241	-0,09826	0,03195	**0,328**
35,00	0,00241	-0,09826	0,01597	**0,163**
40,00	0,00241	-0,09826	0,00000	**0,000**



Замечания.

1. В данном случае можно рассчитать (что заметно проще) обратную зависимость $t(z)$ непосредственно по формуле (5).
2. Квадратное уравнение (5) можно решить приближенно, пренебрегая произведением $\alpha\beta$. В этом приближении получается практически та же зависимость.

Часть 2. Реальные измерения.

2.1 В этом случае суммарное давление газов в термостате равно сумме давлений сухого воздуха и давления водяного пара. Давление сухого воздуха подчиняется уравнению состояния, т.к. масса сухого воздуха остается неизменной. А давление водяного пара есть давление насыщенного водяного пара, зависящее только от температуры (и не зависящее от занимаемого объема). Поэтому при высоте уровня воды в сосуде h, связь между различными давлениями определяется уравнением равновесия столба воды

$$P_0 = P + P_{нас.} + \rho gh, \tag{7}$$

Откуда следует, что давление сухого воздуха равно

$$P = P_0 - P_{нас.} - \rho gh, \tag{8}$$

Уравнение Клапейрона для сухого воздуха в этом случае имеет вид:

$$\frac{\left(P_0 - P_{нас.}(t_{\max})\right)\cdot\left(V_1 + Sl\right)}{T_{\max}} = \frac{\left(P_0 - P_{нас.}(t) - \rho gh\right)\left(V_1 + Sl - Sh\right)}{T}. \tag{9}$$

Или в безразмерных параметрах:

$$\frac{\left(1 - \dfrac{P_{нас.}(t_{\max})}{P_0}\right)}{T_{\max}} = \frac{\left(1 - \dfrac{P_{нас.}(t)}{P_0} - \dfrac{\rho gl}{P_0}\dfrac{h}{l}\right)\left(1 - \dfrac{Sl}{V_1 + Sl}\dfrac{h}{l}\right)}{T} \Rightarrow \tag{10}$$

$$\left(1 - \gamma_{\max}\right)\frac{T}{T_{\max}} = \left(1 - \gamma - \alpha z\right)\left(1 - \beta z\right).$$

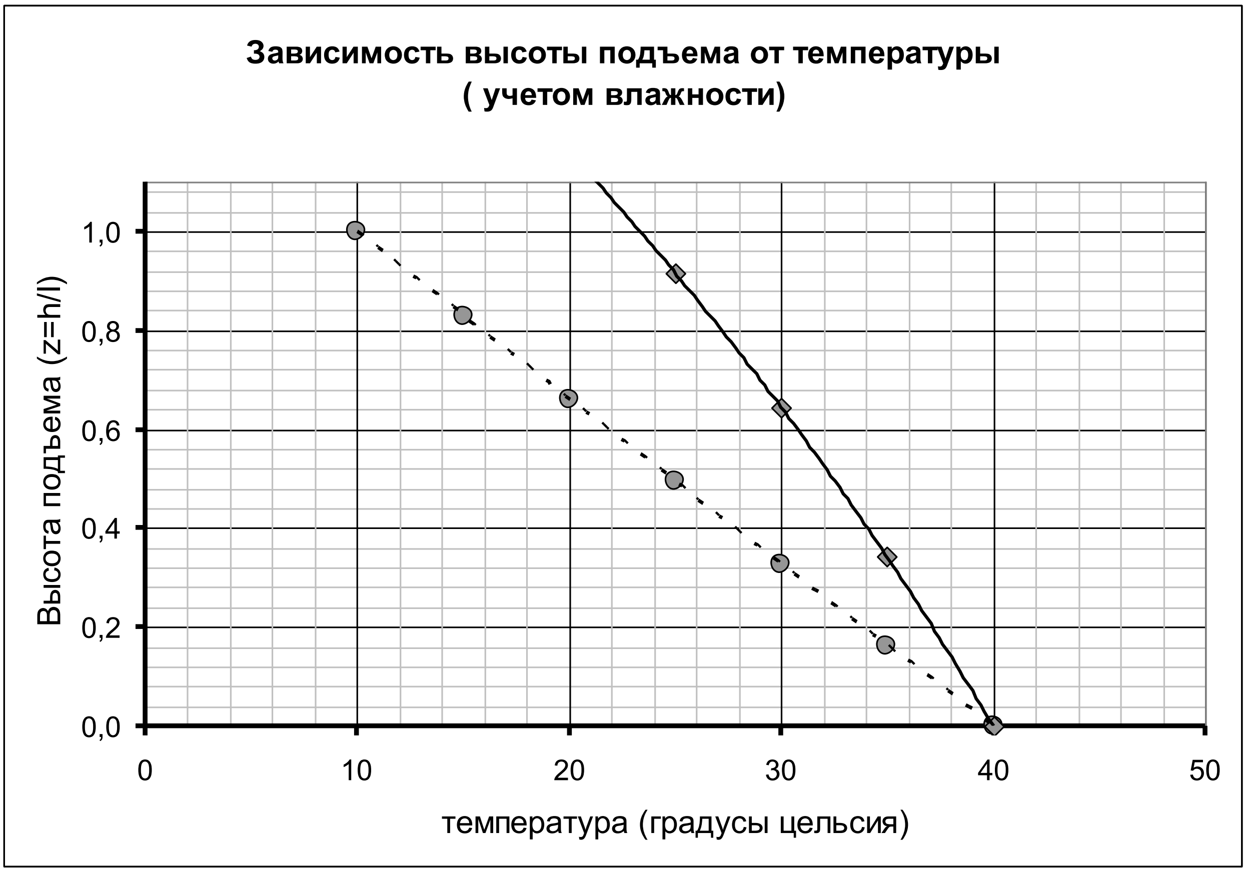
Это уравнение также приводится к квадратному уравнению типа (5) с параметрами

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$a = \alpha\beta; \quad b = -\left(\alpha + \beta(1-\gamma)\right): \quad c = (1-\gamma) - \left(1 - \gamma_{\max}\right)\frac{T}{T_{\max}}. \tag{11}$$

Результаты расчетов всех параметров уравнения (11) и его решение представлены в Таблице 2.

$t°C$	$P, кПа$	γ	**a**	**b**	**c**	**z**
10,00	1,228	0,01228	0,00241	-0,09767	0,15030	**1,602**
15,00	1,706	0,01706	0,00241	-0,09744	0,13073	**1,390**
20,00	2,339	0,02339	0,00241	-0,09713	0,10961	**1,162**
25,00	3,169	0,03169	0,00241	-0,09673	0,08651	**0,915**
30,00	4,246	0,04246	0,00241	-0,09621	0,06095	**0,644**
35,00	5,627	0,05627	0,00241	-0,09554	0,03234	**0,341**
40,00	7,381	0,07381	0,00241	-0,09470	0,00000	**0,000**



Для наглядности на графике оставлена зависимость, рассчитанная без учета давления водяных паров. Естественно, что полученная зависимость имеет смысл только при $z \leq 1$.