Решение:

Задание 10-1. «Лихо закручено»

1.1 «Два шарика на нити» Вращение шариков (материальных точек) на легкой нити по плоскости будет происходить вокруг их центра масс – точки O (Рис. 01). При этом сама точка O будет оставаться неподвижной относительно гладкой горизонтальной плоскости, т.к. нет горизонтальных сил, способных «сдвинуть» систему с места (силы натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ внутренние, их сумма равна нулю).

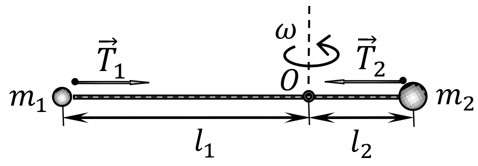

Рис. 01

Таким образом, траектории шариков будут представлять собой горизонтальные окружности радиусами l_1 и l_2 с центром в точке O. Радиусы траекторий шариков найдем из традиционной системы уравнений для центра масс двух материальных точек (см. Рис. 01)

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = l \\ m_1 l_1 = m_2 l_2 \end{cases}. \tag{1}$$

Из (1) находим искомые расстояния до центра масс (оси вращения системы)

$$\begin{cases} l_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} l \\ l_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} l \end{cases}. \tag{2}$$

Поскольку трения в системе нет, то угловая скорость вращения шариков вокруг точки O будет по инерции оставаться постоянной $\omega = const$.

Из второго закона Ньютона с учетом (2) для движения первого шарика в горизонтальной плоскости найдем

$$m_1\omega^2 l_1 = T_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = m_1\omega^2 \frac{m_2}{m_1+m_2} l = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\omega^2 l\,. \tag{3}$$

Аналогично для второго шарика

$$m_2\omega^2 l_2 = T_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = m_2\omega^2 \frac{m_1}{m_1+m_2} l = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\omega^2 l\,. \tag{4}$$

Как следует из (3) и (4), силы натяжения нитей в такой системе (нить легкая) одинаковы и равны

$$T_1 = T_2 = T = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\omega^2 l = \mu\omega^2 l\,, \tag{5}$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ – т.н. «приведенная масса», вспомогательная величина с размерностью массы, часто возникающая при описании системы двух тел. Так из (5) следует, что сила натяжения, действующая на каждый из шариков, равна силе натяжения T при движении тела с приведенной массой μ на нити длиной l с той же угловой скоростью ω.

1.2 «Три шарика на нити» При добавлении третьего шарика на середину нити физика процесса не изменится – центр масс O трех шариков (Рис. 02) по-прежнему будет неподвижным при вращении системы на горизонтальной плоскости. Соответственно, через точку O будет проходить вертикальная ось вращения всей системы с постоянной угловой скоростью ω.

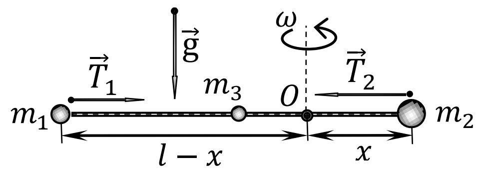

Рис. 02

Однако теперь модули T_1 и T_2 сил натяжения легких нитей, связывающих грузы, будут различными, поскольку шарик m_3 имеет массу, и для его ускоренного движения нужна ненулевая разность сил.

Пусть расстояние от шарика с массой m_2 до центра масс O равно x (Рис. 02). Второй закон Ньютона для движения каждого из шариков в горизонтальной плоскости примет вид

$$m_2\omega^2 x = T_2\ , \tag{6}$$

$$m_1\omega^2(l-x) = T_1\ , \tag{7}$$

$$m_3\omega^2\left(\frac{l}{2}-x\right) = T_2 - T_1\ . \tag{8}$$

Разделив (6) на (7), придем к равенству

$$\frac{m_2 x}{m_1(l-x)} = \frac{T_2}{T_1}, \tag{9}$$

из которого найдем

$$x = \frac{m_1T_2}{m_1T_2+m_2T_1}l\ . \tag{10}$$

Подставляя (10) в (6), найдем угловую скорость вращения шариков

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1T_2+m_2T_1}{m_1m_2l}}\ , \tag{11}$$

а подставляя (10) в (8), найдем массу m_3 третьего шарика

$$m_3 = \frac{2m_1m_2(T_2-T_1)}{m_2T_1-m_1T_2}\ . \tag{12}$$

1.3 «Космическое вращение» Для решения этого пункта достаточно догадаться, что роль третьего шарика массой m_3 здесь играет трос, центр масс которого находится на половине длины $\frac{l}{2}$, т.е. в той же точке где находился третий шарик (это важно!).

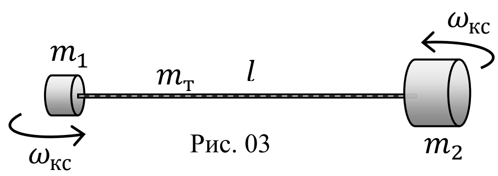

Рис. 03

Следовательно, можно просто аккуратно воспользоваться формулами (11) и (12) с учетом условия малости ($\Delta T \ll T$) разности сил натяжения концов троса (вдоль самого троса эта сила меняется, но уравнения записываются для движения центра масс тела!).

Будем считать, что второй отсек массивнее первого ($m_2 > m_1$), тогда понятно, что $T_2 = T + \Delta T$, а $T_1 = T$.

Соответственно, масса троса, соединяющего отсеки космической станции, будет равна

$$m_т = \frac{2m_1m_2(T_2-T_1)}{m_2T_1-m_1T_2} = \frac{2m_1m_2\Delta T}{(m_2-m_1)T+m_2\Delta T} = \{\Delta T \ll T\} \approx \frac{2m_1m_2\Delta T}{(m_2-m_1)T}\ , \tag{13}$$

а угловая скорость вращения станции

$$\omega_{кс} = \sqrt{\frac{m_1T_2+m_2T_1}{m_1m_2l}} = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)T+m_1\Delta T}{m_1m_2l}} = \{\Delta T \ll T\} \approx \sqrt{\frac{(m_1+m_2)T}{m_1m_2l}} = \sqrt{\frac{T}{\mu l}}\ , \tag{14}$$

где $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ – приведенная масса отсеков станции (без массы троса!).

Обратите внимание, что результат (14) напрямую следует из (5), поскольку масса троса гораздо меньше массы каждого из отсеков по отдельности.