Решение:

Часть 1. Вычисление полного ускорения

1.1 В момент, когда нить составляет угол α с горизонтом, шарик опустился на высоту $h = l\cos\alpha$ (рис. 1), где l – длина нити. Согласно закону сохранения механической энергии (потерь нет) для движения шарика массой m можем записать

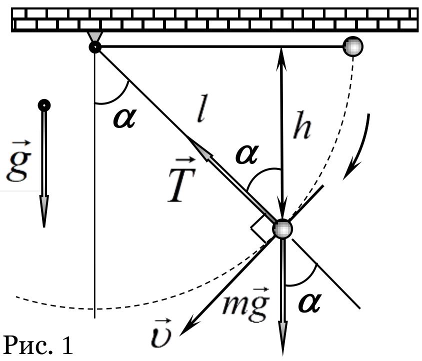


Рис. 1

$$mgh = mgl\cos\alpha = \frac{m\upsilon^2}{2} \;\Rightarrow\; \upsilon^2 = 2gl\cos\alpha, \tag{1}$$

где – υ скорость шарика в рассматриваемый момент, направленная по касательной к дуге. Следовательно, нормальное (центростремительное) ускорение шарика на нерастяжимой нити в данной точке

$$a_n = a_{цс} = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\upsilon^2}{l} = \{(1)\} = 2g\cos\alpha \tag{2}$$

На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости нити $\vec{T}$ (см. рис. 1), следовательно, второй закон Ньютона в проекциях на текущее направление нити и по касательной к ней примет вид

$$\begin{aligned} ma_n &= T - mg\cos\alpha \\ ma_\tau &= mg\sin\alpha \end{aligned}. \tag{3}$$

С учетом (2) из системы (3) находим выражения для касательного ускорения и силы упругости нити

$$\begin{aligned} a_\tau &= g\sin\alpha \\ T &= 3mg\cos\alpha \end{aligned}. \tag{4}$$

1.2 Соответственно, полное ускорение шарика в данный момент найдем с помощью теоремы Пифагора и выражений (2) и (4)

$$a(\alpha) = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{g^2\sin^2\alpha + 4g^2\cos^2\alpha} = g\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}. \tag{5}$$

Как следует из (5), в начальный момент времени ($\alpha = \pi/2$) полное ускорение шарика равно ускорению свободного падения $a = g$ и направлено вниз. Таким образом, пока нить не натянулась, шарик практически свободно падает в течение малого промежутка времени. Поскольку при этом центростремительное ускорение шарика равно нулю (он ещё не успел набрать скорость), то полное ускорение равно касательному ускорению и равно g.

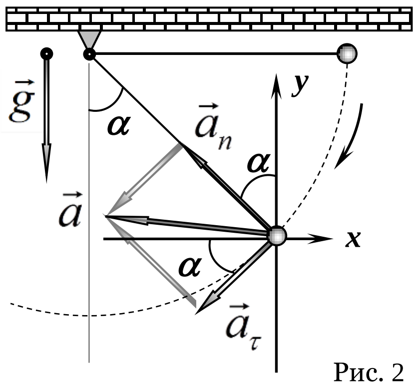


Рис. 2

При прохождении шариком нижней точки траектории ($\alpha = 0$) равно нулю касательное ускорение, а его полное ускорение имеет максимальное значение $a = 2g$ и направлено вверх. В этом случае оно совпадает с центростремительным ускорением. Заметим, что сила натяжения нити при этом максимальна и равна $T = 3mg$ (направлена вверх).

Угол β, который составляет вектор полного ускорения $\vec{a}$ с горизонтом, найдем из параллелограмма ускорений на рисунке 2

$$tg\beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{a_\tau \sin\alpha - a_n \cos\alpha}{a_\tau \cos\alpha + a_n \sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{3\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{tg^2\alpha - 2}{3tg\alpha} \quad . \qquad (6)$$

1.3 В момент, когда вектор полного ускорения шарика горизонтален $\beta = 0$, следовательно

$$tg\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad a_\tau \sin\alpha_1 = a_n \cos\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad tg^2\alpha_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 55° \ . \qquad (7)$$

Подставляя полученное значение угла $\alpha_1 = 55°$ в формулу для полного ускорения (5), находим искомое значение для горизонтального ускорения шарика

$$a_1 = g\sqrt{1+3\cos^2\alpha_1} = g\sqrt{1+\frac{3}{1+tg^2\alpha_1}} = g\sqrt{2} = 1{,}4g \ . \qquad (8)$$

Часть 2. Построение годографа полного ускорения шарика

2.1 Для удобства построения годографа вектора ускорения шарика перейдём к декартовым координатам (x, y), изображенным на рисунке 3 (с учетом знаков). Тогда проекции полного ускорения шарика примут вид

$$\begin{aligned} a_x &= -a_\tau \cos\alpha - a_n \sin\alpha = -3g\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{3}{2}g\sin 2\alpha \\ a_y &= -a_\tau \sin\alpha + a_n \cos\alpha = g(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \end{aligned} \ . \qquad (9)$$

Для формализации процесса расчёта введем удобные безразмерные единицы измерения ускорений, имеющие очевидный смысл

$$a_x^* = \frac{a_x}{g}; \ a_y^* = \frac{a_y}{g} . \qquad (10)$$

Тогда расчетные формулы для заполнения таблицы примут вид

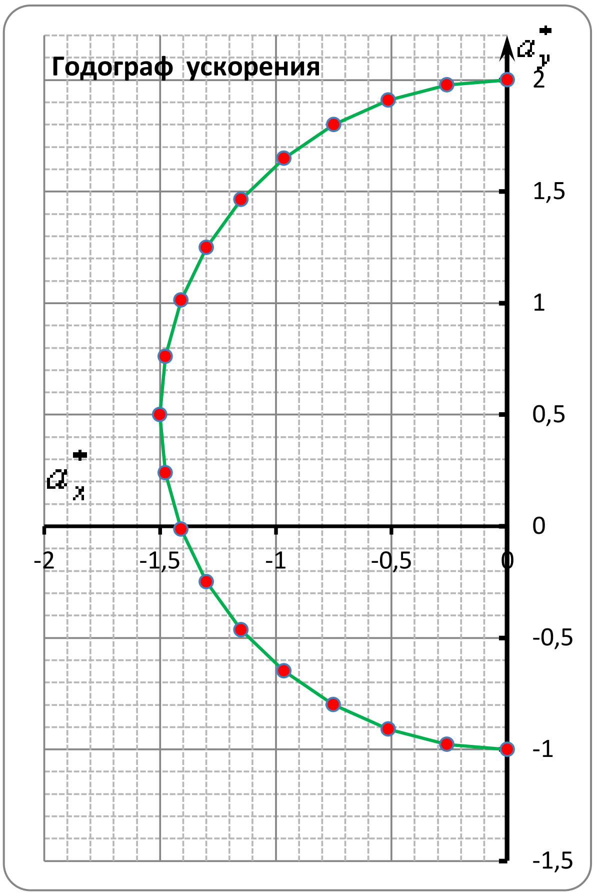
$$\begin{aligned} a_x^*(\alpha) &= -3\sin\alpha\cos\alpha \\ a_y^*(\alpha) &= 2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{aligned} . \qquad (11)$$

2.3 Расчёт по формулам даёт следующие результаты

Таблица 1. Вычисление a_x^* и a_y^*. Рис. 3. Построение годографа ускорения на бланке.

Угол	a_x^*	a_y^*
90°	0,00	-1
85°	-0,26	-0,98
80°	-0,51	-0,91
75°	-0,75	-0,80
70°	-0,96	-0,65
65°	-1,15	-0,46
60°	-1,30	-0,25
55°	-1,41	-0,01
50°	-1,48	0,24
45°	-1,50	0,50

40°	-1,48	0,76
35°	-1,41	1,01
30°	-1,30	1,25
25°	-1,15	1,46
20°	-0,96	1,65
15°	-0,75	1,80
10°	-0,51	1,91
5°	-0,26	1,98
0°	0,00	2,00



2.2 Как следует из анализа рисунка 3, максимальное (по модулю) горизонтальное ускорение шарика равно $|a_x^*| = |-1{,}5| = 1{,}5$. Это же, кстати, следует и из формулы (9) при $\alpha = \pi/4$. Максимальное же вертикальное ускорение $a_y^* = 2{,}0$ шарик приобретает в нижней точке траектории ($\alpha = 0$), которой соответствует верхняя точке графика на рисунке 3.

2.4 Удивительно, но несмотря на достаточно сложный характер рассматриваемого движения, график на рисунке 3 напоминает траекторию движения самого шарика! Действительно, точки неплохо «ложатся» на полуокружность радиуса $R = 1{,}5$ с центром в точке с координатами (0;+0,5). Убедимся в справедливости сделанного предположения.

2.5 Поскольку уравнение окружности радиуса R с центром в точке с координатами $(a;b)$ имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \tag{12}$$

то для доказательства справедливости сделанного предположения достаточно проверить тождественность равенства (13) при любых $0° \le \alpha \le 90°$

$$(a_x^*)^2 + (a_y^* - 0{,}5)^2 = 1{,}5^2 = \frac{9}{4}. \tag{13}$$

Используя (11) приведём (13) к виду

$$9\sin^2\alpha\cos^2\alpha + (2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} \quad . \tag{14}$$

После избавления от знаменателя и раскрытия скобок из (14) находим

$$36\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 16\cos^4\alpha - 16\cos^2\alpha\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha + 1 = 9\ . \qquad (15)$$

Приводя подобные, и сокращая, упростим выражение (15) следующим образом

$$5\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 4\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - 2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2\ . \qquad (16)$$

Собирая полный квадрат, с учётом основного тригонометрического тождества $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1^2$, выражение (16) примет вид

$$3\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 3\cos^4\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2. \qquad (17)$$

Далее «немного удачи» при перегруппировке членов и вынесении за скобки

$$\sin^2\alpha(3\cos^2\alpha + 1) + \cos^2\alpha(3\cos^2\alpha + 1) - 3\cos^2\alpha = 1\ , \qquad (18)$$

позволяют ещё раз довести дело до основного тригонометрического тождества и до … победного конца

$$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(3\cos^2\alpha + 1) - 3\cos^2\alpha = 1$$

$$3\cos^2\alpha + 1 - 3\cos^2\alpha = 1 \qquad !!!$$

$$1 \equiv 1$$

(19)

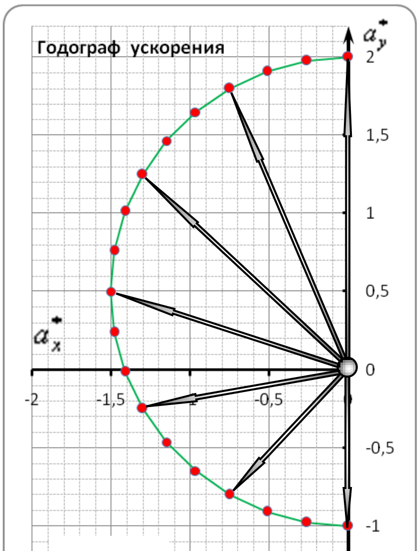


Рис. 4

Легко догадаться (хотя и не требуется в условии задачи), что при движении шарика в левой полуплоскости, на годографе ускорения мы получим симметричную полуокружность, замыкающую траекторию до полной окружности. Далее с разворотом все повторяется вновь против часовой стрелки.

Поскольку центр окружности находится в точке с координатами (0;+0,5), то в неинерциальной системе отсчёта, движущейся с ускорением $\vec{a} = -\vec{g}/2$, направленным вверх, вектор полного ускорения неравномерно вращается по рассмотренной окружности, сохраняя свою длину.

Таким образом, искомый годограф полного ускорения шарика представляет собой полуокружность (совершенно «случайно» изображенную в условии задачи, ☺) радиусом $R = 1{,}5g$ со сдвинутым (относительно начала координат) центром (рис. 4).