Возможные решения:

Часть 1. Адиабатный процесс

1.1 Внутренняя энергия идеального одноатомного газа вычисляется по формуле

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT = \frac{3}{2}\nu RT. \quad (1)$$

Поскольку при изохорном процессе $(V = const)$ работа газом не совершается, то при нагревании идеального одноатомного газа на ΔT увеличится только его внутренняя энергия на ΔU

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T. \quad (2)$$

С другой стороны, согласно условию, можем записать

$$\Delta U = c_V^M \nu \Delta T. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), находим молярную теплоёмкость идеального одноатомного газа при постоянном объёме

$$c_V^M = \frac{3}{2}R. \quad (4)$$

Заметим, что двухатомного идеального газа при комнатных температурах $c_V^M = \frac{5}{2}R$, для трёхатомного $c_V^M = \frac{6}{2}R$ и далее она монотонно возрастает в зависимости от числа атомов и особенностей (температуры) изохорного процесса.

Используя (4) и (1), запишем внутреннюю энергию U любого идеального газа в общем виде

$$U = c_V^M \nu T = \nu c_V^M T. \quad (5)$$

1.2 Согласно первому началу термодинамики при произвольном процессе количество теплоты ΔQ, сообщенное газу, идет на изменение его внутренней энергии ΔU и совершение газом работы $\Delta A = p\Delta V$

$$\Delta Q = \Delta U + p\Delta V. \quad (6)$$

Рассмотрим два близких состояния системы (p, V) и $(p + \Delta p, V + \Delta V)$. Из уравнения состояния идеального газа в форме Клапейрона – Менделеева для этих изобарных состояний можем записать

$$\begin{aligned} pV &= \nu R\Delta T \\ p(V + \Delta V) &= \nu R(T + \Delta T) \end{aligned} \quad (7)$$

Вычитая уравнения, из (7) найдем

$$p\Delta V = \nu R\Delta T. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), с учетом (3) получим для изобарного процесса

$$\Delta Q = c_V^M \nu \Delta T + \nu R\Delta T. \quad (9)$$

Теперь, по определению, легко находим молярную теплоёмкость идеального газа при постоянном давлении

$$c_p^M = \frac{\Delta Q}{\nu \Delta T} = \frac{c_V^M \nu \Delta T + \nu R\Delta T}{\nu \Delta T}. \quad (10)$$

После сокращения на $\nu\Delta T$, окончательно получаем, что для произвольного идеального газа справедливо равенство

$$c_p^M = c_V^M + R. \quad (11)$$

Уравнение (11) было получено в 1842 г. немецким естествоиспытателем и очень внимательным медиком (!) Р. Майером, который первым заметил различия в цвете крови (!!) на экваторе и в средних широтах. Где кровь, а где термодинамика ...? ☺

Таким образом, согласно уравнению Майера, молярная газовая постоянная R (см. размерность) даёт разность между молярными теплоемкостями идеального газа при различных процессах: при изобарном и при изохорном.

1.3 По определению адиабатный процесс осуществляется в теплоизолированной термодинамической системе, т.е. без теплообмена $(Q = 0)$ с окружающей средой, следовательно, первое начало термодинамики для него примет вид

$$Q = 0 = \Delta U + A. \tag{12}$$

Из (12) следует, что малая работа ΔA идеального газа при малом объемном расширении на ΔV совершается только за счет убыли его внутренней энергии (притока теплоты нет)

$$\Delta A = p\Delta V = -\Delta U. \tag{13}$$

С учетом (5) перепишем (13) в виде

$$p\Delta V = -\Delta U = -\nu c_V^M \Delta T. \tag{14}$$

Выразим давление идеального газа из уравнения Клапейрона – Менделеева

$$pV = \nu RT \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\nu RT}{V}. \tag{15}$$

С учетом (15) выражение (14) примет вид

$$\frac{\nu RT}{V}\Delta V = -\nu c_V^M \Delta T \quad \Rightarrow \quad -\frac{R}{c_V^M}\cdot\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T} \quad . \tag{16}$$

Перепишем (16) в «удобном» виде, чтобы воспользоваться математической подсказкой из условия задачи

$$\frac{\Delta T}{T} + \frac{R}{c_V^M}\cdot\frac{\Delta V}{V} = 0 \,. \tag{17}$$

Теперь, с учетом математической подсказки из условия задачи, можем заключить, что справедливо равенство

$$TV^{\frac{R}{c_V^M}} = TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}\,. \tag{18}$$

Поскольку $\frac{R}{c_V^M} = \gamma - 1$, то окончательно получим

$$TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}\,.$$

где $\gamma = 1 + \frac{R}{c_V^M} = \frac{c_V^M + R}{c_V^M} = \frac{c_p^M}{c_V^M} > 1$ – показатель адиабаты Пуассона.

Несмотря на то, что уравнение адиабатного процесса в виде (18) легче выводится, чаще (с подачи самого Пуассона) оно используется в выражении через переменные (p, V).

1.4 Перепишем уравнение адиабаты для идеального газа в наиболее распространенном, «классическом» виде, которое использовал Пуассон, т.е. в переменных (p, V).

Для замены переменных из (15) выразим температуру T и подставим в (18)

$$pV = \nu RT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{pV}{\nu R} \quad \Rightarrow \quad \frac{pV}{\nu R}V^{\gamma-1} = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad pV^{\gamma} = \mathrm{const}^* \quad . \tag{19}$$

Следовательно, уравнение адиабатного процесса (Пуассона) для произвольного идеального газа в параметрах $(p; V)$ можно записать в виде

$$pV^{\gamma} = \mathrm{const}\,, \tag{20}$$

где показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_p^M}{c_V^M} > 1$.

1.5 Выразим зависимость давления от объема $p(V)$ идеального газа при изотермическом процессе

$$p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{const_1}{V}, \tag{21}$$

и при адиабатном процессе

$$p = \frac{const_2}{V^\gamma}. \tag{22}$$

Поскольку $\gamma > 1$, то из (21) и (22) следует, что с ростом объёма V идеального газа на (p, V) – диаграмме адиабата убывает «быстрее», чем изотерма. Можно сказать и по другому: на (p, V) – диаграмме адиабата идет «круче», чем изотерма, поэтому у них обязательно будет точка пересечения B (Рис. 5).

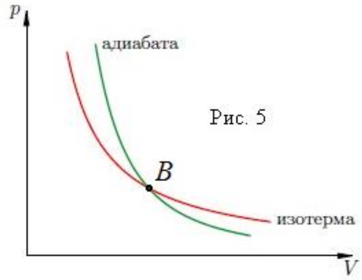

Рис. 5

Соответственно, после точки пересечения графиков (см. Рис. 5), при $V \to \infty$ адиабата всегда прижимается «ближе» к оси абсцисс (объёмов), т.е. как бы «ныряет» под изотерму.

Часть 2. Цикл с адиабатой

2.1 Пусть в состоянии A идеальный газ имеет давление p_A и объем V_A, а в течение в течение цикла его объем увеличивается в n раз (Рис. 2).

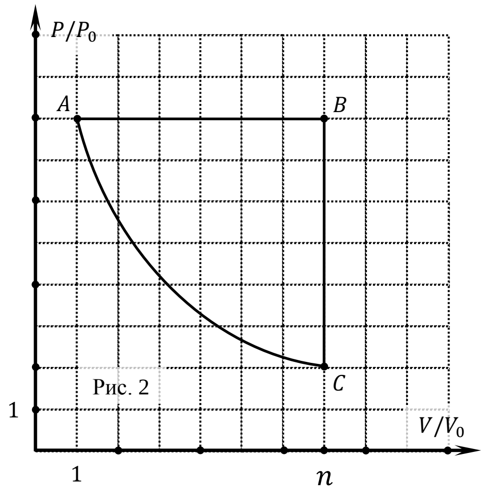

Рис. 2

Участок AB цикла соответствует изобарному нагреванию идеального газа, поэтому здесь газ (рабочее тело) получает теплоту от внешнего источника (работает нагреватель).

Участок BC цикла соответствует изохорному охлаждению газа, поэтому здесь рабочее тело отдает теплоту внешнему источнику (работает холодильник).

Участок CA цикла соответствует адиабатному сжатию газа, поэтому здесь газ не получает и не отдает теплоту внешнему источнику, поскольку отсутствует теплообмен (не работают ни холодильник, ни нагреватель).

Таким образом, газ получает теплоту от нагревателя только на участке AB цикла.

Запишем первое начало термодинамики для участка AB цикла

$$Q_1 = Q_{AB} = \Delta U_{AB} + A_{AB} = \{(11)\} = \frac{5}{2}\nu R\Delta T = \frac{5}{2}p_A V_A(n-1). \tag{23}$$

Таким образом, согласно (23) количество теплоты Q_1, полученное рабочим телом от нагревателя, определяется начальными параметрами системы (давлением p_A и объемом V_A) и степенью расширения n одноатомного газа.

2.2 Поскольку процесс CA является адиабатическим, то можно воспользоваться уравнением Пуассона (20), согласно которому

$$p_A V_A{}^\gamma = p_C V_C{}^\gamma = p_C (nV_A)^\gamma, \tag{24}$$

где показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_p^M}{c_V^M} = \frac{5}{3}$ (одноатомный газ).

Тогда

$$p_C = \frac{p_A}{n^{\gamma}}\,. \qquad (25)$$

Как следует из (25) для одноатомного газа $(\gamma = 5/3)$ данное значение будет равно

$$p_C = \frac{p_A}{n^{5/3}}\,. \qquad (26)$$

2.3 Из анализа пункта 2.1 следует, что холодильник работал только на участке BC цикла. Согласно первому началу термодинамики

$$Q_2 = Q_{BC} = \Delta U_{BC} + A_{BC} = \Delta U_{BC} = \{(3)\} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}(p_A - p_C)nV_A\,. \qquad (27)$$

Используя (26), перепишем (27) в виде

$$Q_2 = \frac{3}{2}p_A\left(1 - \frac{1}{n^{5/3}}\right)nV_A = \frac{3}{2}p_A V_A\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right). \qquad (28)$$

2.4 С учетом (23) и (28) для термодинамического КПД η данного цикла получаем

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{n-1}\,. \qquad (29)$$

Как следует из (29) КПД данного теплового двигателя не зависит от начальных параметров p_A и V_A идеального газа, а зависит только от того, во сколько раз n увеличивается объем газа в течение цикла.

Это связано с тем, что в данном цикле и количество теплоты Q_1, полученное от нагревателя, и количество теплоты Q_2, отданное холодильнику, оказались пропорциональны одной и той же величине $p_A V_A$, которая, по итогу, сокращается.

2.5 Для нахождения максимального КПД цикла η_{max} нужно исследовать (29) как функцию от n (например, через производную). Но можно использовать и олимпиадный метод «хитрого глаза», т.е. внимательно, «по-рентгеновски» посмотреть на (29), учитывая свойства дробей.

Это приведет нас к системе неравенств

$$1 < \frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{n-1} < \frac{n}{n-1}\,. \qquad (30)$$

Кроме того, при $n \to \infty$ выражение $\frac{n}{n-1}$ стремится к единице. Следовательно, величина $\frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{n-1}$ стремится к единице сверху.

Соответственно, КПД цикла будет максимальным при $n \to \infty$ и это предельное значение равно

$$\eta_{max} = \eta(n \to \infty) = 1 - \frac{3}{5}\cdot 1 = \frac{2}{5} = 0{,}40 = 40\%. \qquad (31)$$

Полученное значение КПД η_{max} конечно же не превышает предельное значение идеального цикла Карно, которое устанавливает теоретический предел возможного термодинамического КПД тепловой машины при данной разности температур.

2.6 Для цикла, изображенного на Рис. 4, объем газа по отношению к начальному значению увеличивается в $n = 7$ раз. Следовательно, согласно (29) КПД такого цикла

$$\eta = 1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{\left(7 - \frac{1}{7^{2/3}}\right)}{7-1} = \{0{,}3273275883\} = 0{,}33 = 33\%\,. \qquad (32)$$