Решение:

Задание 1. Гармоническая разминка

1.1 «Разгон маятника» При равномерном движении лифта или электрички в любом направлении (вверх – вниз или вправо – влево) период колебаний математического маятника, подвешенного к потолку, не изменится, поскольку все инерциальные системы отсчета (ИСО) эквивалентны (принцип относительности Галилея). Период колебаний такого маятника будет равен периоду колебаний «неподвижного» маятника длиной l, вычисленному по формуле Гюйгенса

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{1}$$

где g – ускорение свободного падения.

При ускоренном движении лифта или электрички период колебаний T маятника можно найти по «модернизированной» формуле Гюйгенса через т.н. «эффективное ускорение» g^*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g^*}}\,. \tag{2}$$

В случае электрички (её ускорение a_2 горизонтально, не важно, в какую сторону) эффективное ускорение находится по теореме Пифагора

$$g^* = \sqrt{a^2 + g^2} = \sqrt{a_2^2 + g^2} > g\,. \tag{3}$$

Как следует из (2) и (3), в ускоренно движущейся электричке (не важно, разгон или торможение) период колебаний математического маятника всегда меньше, чем покоящегося.

При ускорении лифта вверх эффективное ускорение

$$g^* = g + a_1 > g\,, \tag{4}$$

а при ускорении вниз

$$g^* = g - a_1 < g\,. \tag{5}$$

Из сравнения (3), (4) и (5) получаем, что равенство периодов колебаний математического маятника в электричке и лифте может наблюдаться только при ускорении лифта вверх, когда

$$\sqrt{a_2^2 + g^2} = g + a_1\,. \tag{6}$$

Из (6) находим

$$a_2 = \sqrt{a_1(a_1 + 2g)} = 5{,}6\ \text{м/с}^2\,. \tag{7}$$

По правилам приближенных вычислений в окончательных расчётах сохраняем по две значащие цифры, поскольку «худшее» из данных условия задачи содержит две значащие цифры (не путать с цифрами после запятой!).

Подчеркнем, что (4) задает направление ускорения лифта (вверх), а в задаче спрашивается: куда он едет? Но за направление движения «отвечает» скорость лифта, а не его ускорение. Следовательно, ехать лифт при этом может «куда угодно»: как вверх (ускоряется), так и вниз (тормозится) – в обоих случаях ускорение будет направлено вверх. Таким образом, распространенный ответ «лифт едет вверх» является неполным, а строго говоря – неверным.

1.2 «Маятник в шахте» При подъёме в гору на малую высоту h (по сравнению с радиусом Земли) несколько уменьшается ускорение свободного падения g.

Действительно, из закона всемирного тяготения следует, что на поверхности Земли

$$g = G\frac{M}{R^2}, \qquad (8)$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравитационная постоянная, $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг и $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м – соответственно, масса и радиус Земли.

Соответственно, период колебаний маятника часов по формуле Гюйгенса будет равен

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cdot R^2}{GM}} = 2\pi R\sqrt{\frac{l}{GM}}. \qquad (9)$$

При подъёме на высоту h расстояние до центра Земли увеличивается, следовательно

$$g(h) = G\frac{M}{(R+h)^2} = \frac{R^2}{(R+h)^2}g = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}g. \qquad (10)$$

Как следует из (10), только при $h = (\sqrt{2}-1)R = 0{,}41R$, т.е. на высоте $h = 2639$ км над поверхностью Земли (глубокий космос!) ускорение свободного падения уменьшается в 2 раза (на 50%).

Таким образом, высоту $h_1 = 1{,}0$ км уверенно и с большой точностью можно считать малой, т.е. гораздо меньше радиуса Земли. В задаче не требуется, но преобразуем (10) для малых высот h $(h \ll R)$ с учетом математической подсказки из условия задачи

$$\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = \left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} \approx 1 + (-2)\left(\frac{h}{R}\right) = 1 - \frac{2h}{R}, \qquad (11)$$

тогда

$$g(h) \approx \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}g = \left(1 - \frac{2h}{R}\right)g. \qquad (12)$$

С учетом (9) и (10), на высоте h над поверхностью земли период колебаний $T_1(h)$ математического маятника составит

$$T_1(h) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(h)}} = 2\pi\sqrt{\frac{l(R+h)^2}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cdot R^2}{GM}} \times \sqrt{\frac{(R+h)^2}{R^2}} = T_0\left(1+\frac{h}{R}\right). \qquad (13)$$

Поскольку у правильно идущих часов $T_0 = 1{,}00$ с , то для случая часов на горе получим

$$T_1(h) = T_0\left(1+\frac{h}{R}\right) = 1{,}000157 \text{ с}, \qquad (14)$$

тогда за сутки $(24 \times 60 \times 60 = 86\,400)$ они сделают N_1 качаний (меньше, чем на поверхности)

$$N_1 = \frac{24\times60\times60}{1{,}000157} = 86\,386. \qquad (15)$$

Это и соответствует суточному отставанию на $\tau = 14$ с , приведенному в условии.

При опускании в шахту на глубину h ускорение свободного падения также уменьшается, но по линейному закону

$$g(h) = \left(1 - \frac{h}{R}\right)g. \qquad (16)$$

Этот эффект связан с тем, что внешние (по отношению к текущему положению тела) слои Земли «перестают» притягивать тела, уменьшая тем самым «эффективную», т.е. гравитирующую массу Земли. Учет притяжения внутренних слоёв Земли и приводит к зависимости (16).

Соответственно, период колебаний $T_2(h)$ маятника в шахте на глубине h будет равен

$$T_2(h) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(h)}} = T_0\sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{h}{R}\right)}} = T_0\left(1-\frac{h}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx T_0\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{h}{R}\right)\right) = T_0\left(1+\frac{h}{2R}\right). \qquad (17)$$

Сравнивая (13) и (17), находим, что для одинакового замедления хода маятниковых часов на горе и в шахте необходимо выполнение условия равенства их периодов колебаний (время суточного отставания $\tau = 14$ с дано для справки, и для решения не потребовалось)

$$T_0\left(1+\frac{h_1}{R}\right) = T_0\left(1+\frac{h_2}{2R}\right) \quad \Rightarrow \quad h_2 = 2h_1 . \tag{18}$$

Расчет даёт

$$h_2 = 2h_1 = 2{,}0 \text{ км} . \tag{19}$$

Как видим из (19), для «одинакового отставания» маятниковые часы необходимо опускать в шахту на бóльшую глубину (в два раза!), чем поднимать в гору. Оно и понятно, поскольку в шахте ускорение свободного падения (16) убывает с глубиной в два раза медленнее, чем на горе (12).

Можно сказать и иначе: при одинаковых h маятниковые часы в шахте отстают в два раза меньше, чем на горе, т.е. идут точнее. В этом смысле лучше «зарываться», чем «подниматься»! ☺

1.3 «Непостоянная планка» В положении равновесия системы моменты сил тяжести шариков (массой планки пренебрегаем, поскольку она лёгкая) относительно точки касания O планки и цилиндра должны быть равны (Рис. 01)

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2 , \tag{20}$$

где l_1 и l_2 – плечи соответствующих сил тяжести. Можно сказать и иначе – центр масс системы при равновесии должен быть в точке O.

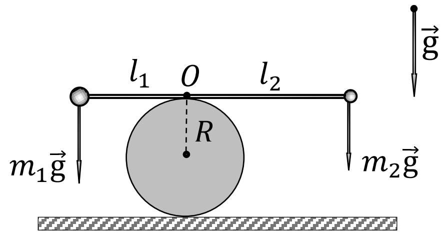

Рис. 01

Кроме того, выполняется очевидное условие

$$l_1 + l_2 = l . \tag{21}$$

Из системы уравнений (20) и (21) находим

$$l_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} l, \qquad l_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} l \tag{22}$$

Рассмотрим механическую систему в момент, когда планка с шариками отклонена от положения равновесия на малый угол α и касается цилиндра новой точкой A (Рис. 02).

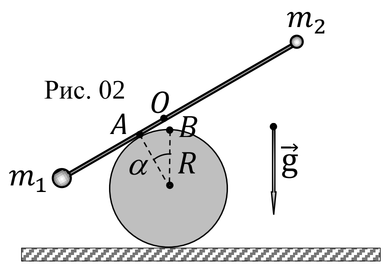

Рис. 02

Поскольку планка двигалась по цилиндру без проскальзывания, то длина отрезка AO (O – прежняя точка касания) равна длине дуги AB (B – верхняя точка цилиндра)

$$AO = \breve{AB} = \alpha R . \tag{23}$$

Подчеркнем, что точки O и B не лежат на одной вертикали, хотя для решения это не важно.

При отклонении планки от положения равновесия точка A опустилась (Рис. 03) на некоторую высоту h_1 относительно верхней точки цилиндра.

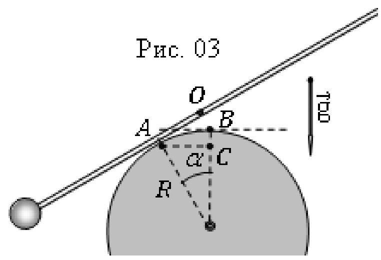

Рис. 03

Из Рис. 3 с учетом малости угла α и подсказки из условия находим

$$h_1 = BC = R(1-\cos\alpha) \approx \frac{\alpha^2}{2} R . \tag{24}$$

Соответственно, при отклонении планки центр масс O системы поднялся относительно начального уровня (с учетом малости угла α и подсказки из условия) на высоту h_2

$$h_2 = AO\sin\alpha - h_1 = \{AO\sin\alpha \approx \alpha R \cdot \alpha\} = \alpha R^2 - \frac{\alpha^2}{2}R = \frac{\alpha^2}{2}R\ . \qquad (25)$$

Следовательно, потенциальная энергия $E^{\text{п}}$ системы при отклонении планки с шариками на малый угол α увеличилась на величину

$$E^{\text{п}} = (m_1 + m_2)\mathrm{g}\cdot h_2 = (m_1 + m_2)\mathrm{g}R\cdot\frac{\alpha^2}{2}\,. \qquad (26)$$

Заметим, что (26) можно получить и другим способом: рассматривая смещение по вертикали каждого шарика. Придётся немного больше «попотеть» с преобразованиями, но результат, конечно же, получится таким же.

Кинетическая энергия системы в рассматриваемый момент складывается из кинетических энергий шариков (планка легкая)

$$E^{\text{к}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1 v_2^2}{2}\,. \qquad (27)$$

Однако, из-за смещения точки касания цилиндра планкой (из $(\cdot)\,O$ в $(\cdot)\,A$) изменятся расстояния до мгновенной оси вращения, следовательно, линейные скорости мгновенного вращения шариков станут равными

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega(l_1 - \alpha R) \\ v_2 &= \omega(l_2 + \alpha R) \end{aligned}\ , \qquad (28)$$

где ω – мгновенная угловая скорость вращения планки.

Подставляя (28) в (27), с учетом (20), получим

$$E^{\text{к}} = \frac{\omega^2}{2}\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2\alpha R(m_2 l_2 - m_1 l_1) + (m_1 + m_2)\alpha^2 R^2\right) = \frac{\omega^2}{2}\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + (m_1 + m_2)\alpha^2 R^2\right)\,. \qquad (29)$$

При малых α вторым слагаемым в (29) можно пренебречь (оно второго порядка малости, поскольку α в квадрате!), тогда кинетическая энергия системы принимает «красивый» вид

$$E^{\text{к}} = \frac{\omega^2}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\,. \qquad (30)$$

Запишем закон сохранения энергии для данной колебательной системы

$$E^{\text{п}} + E^{\text{к}} = (m_1 + m_2)\mathrm{g}R\cdot\frac{\alpha^2}{2} + (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\cdot\frac{\omega^2}{2} = const\,. \qquad (31)$$

Далее для получения классического уравнения гармонических колебаний

$$\ddot{\alpha}(t) + \omega^2\cdot\alpha(t) = 0 \qquad (32)$$

можно найти производную от (31) по времени и традиционным способом найти период колебаний системы.

Однако проще и короче провести энергетическую аналогию с пружинным маятником, для которого

$$E^{\text{п}} + E^{\text{к}} = k\cdot\frac{x^2}{2} + m\frac{v^2}{2} = const\,, \qquad (33)$$

и период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \qquad (34)$$

Сравнивая (31) и (33), находим, что для планки с грузами роль массы m играет величина $m \to (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)$, называемая *моментом инерции* системы. Роль коэффициента упругости k пружины играет величина $k \to ((m_1 + m_2)\mathrm{g}R)$.

Таким образом, искомый период T малых колебаний «непостоянной планки» равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{(m_1+m_2)gR}} = 2\pi\frac{l}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{gR}}\,. \qquad (35)$$