Возможное решение:

Часть 1. Арифметическая электростатика

1.1 Суть метода «мысленного поворота» фактически полностью «изложена» в его названии: рассмотрим поворот всей системы одинаковых зарядов «как целого» (Рис. 01) в любом направлении (например, по часовой стрелке) на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ (или кратный ему).

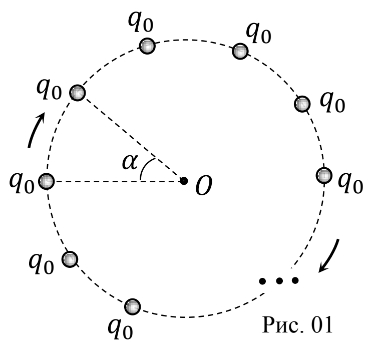


Рис. 01

Поскольку электростатическое поле является центральным, то вектор напряженности точечного заряда всегда направлен вдоль прямой, проходящей через данный заряд.

Это значит, что искомый вектор напряженности $\vec{E}_1$ системы тоже «жёстко связан» с рассматриваемой системой зарядов. Следовательно, при повороте системы зарядов он также повернётся в плоскости рисунка на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Таким образом, при подобном «мысленном повороте» вектор напряженности поля поменяет свое направление, т.е. вектор $\vec{E}_1$ изменится.

Но с другой стороны, в силу симметрии данной системы зарядов, при таком повороте каждый заряд «перейдет» в соседний, т.е. с точки зрения «стороннего наблюдателя» в системе ничего не изменится (!), поскольку все заряды одинаковые. Следовательно, вектор $\vec{E}_1$ при таком повороте не изменится!

Мы пришли к логическому противоречию, следовательно, что-то предположили неверно. На самом деле данное противоречие возникло лишь потому, что обычно у вектора есть длина, и «по умолчанию» мы считали его ненулевым, т.е.

$$\vec{E}_1 \neq \vec{0}\,. \qquad (1)$$

«Разрешить» полученное противоречие можно только предположив обратное, что

$$\vec{E}_1 = \vec{0}\,. \qquad (2)$$

Иными словами, можно считать, что нулевой вектор направлен «куда угодно», поскольку его модуль равен нулю. Говоря более строго, с нулевым вектором не связывают никакого направления в пространстве, т.е. он сонаправлен (и перпендикулярен!) любому ненулевому вектору.

Таким образом, при одинаковых зарядах в вершинах произвольного правильного многоугольника напряженность $\vec{E}_1$ электростатического поля в его центре O равна нулю.

Заметим, что и другие методы (например, суммирование векторов по правилу многоугольника) приводят к такому же результату (2), но именно метод «мысленного поворота» содержит *неявную подсказку* нашим юным олимпионикам для выполнения следующего пункта задачи.

1.2 Поскольку шарики маленькие, то будем считать заряды (q_i) точечными. Как следует из закона Кулона, напряженность электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q_i в точке пространства с радиус-вектором $\vec{r}_i$

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}\,. \tag{3}$$

Согласно (3), поле пропорционально заряду, т.е. больший заряд даёт больший вклад в результирующее (суммарное) поле. Это значит, что вклад последних (бóльших) зарядов арифметической прогрессии в общее поле будет наиболее значительным.

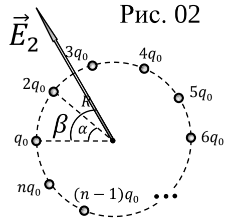
Для нахождения напряженности $\vec{E}_2$ электростатического поля, создаваемого системой точечных зарядов в центре многоугольника, по принципу суперпозиции полей необходимо просуммировать напряженности полей от каждого из зарядов системы

$$\vec{E}_2 = \sum_i \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \cdots + \vec{E}_{n-1} + \vec{E}_n\,, \tag{4}$$

где индекс суммирования i меняется «по всем зарядам» арифметической прогрессии от единицы до n.

В отличие от предыдущего пункта задачи сумма (4) уже не будет равна нулю ($\vec{E}_2 \neq \vec{0}$), поскольку теперь векторы $\vec{E}_i$ будут иметь «различную длину» из-за возрастания зарядов в вершинах многоугольника.

Рис. 02



Иными словами искомый вектор $\vec{E}_2$ (Рис. 02) обязательно будет иметь и модуль E_2, и некоторое направление в плоскости рисунка, которое можно задать, например, углом β, образуемым данным вектором с «нижним» радиусом.

Как известно, при арифметической прогрессии каждый следующий член больше предыдущего на одну и ту же величину, соответственно, разность между ними остается постоянной. Это соображение и положим в основу модернизированного «метода поворота» для вычисления $\vec{E}_2$.

Вынесем вектор $\vec{E}_2$ на отдельную векторную диаграмму (Рис. 03). Мысленно повернем систему зарядов на угол α по часовой стрелке вокруг точки O – при этом вектор $\vec{E}_2$ на диаграмме также повернется на угол α в том же направлении и перейдет в положение $\vec{E}_2^*$, отмеченное пунктиром (см. Рис. 03).

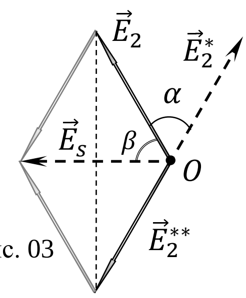


Рис. 03

Если же теперь поменять знаки всех зарядов (сделать их отрицательными), то вектор $\vec{E}_2^*$, согласно (3), также поменяет свое направление на противоположное (повернется на угол 180° и перейдёт в положение $\vec{E}_2^{**}$ на векторной диаграмме (см. Рис. 03)). Понятно, что при таких преобразованиях модули векторов $\vec{E}_2^*$ и $\vec{E}_2^{**}$ останутся равными модулю искомого вектора $\vec{E}_2$

$$E_2 = E_2^* = E_2^{**}\,. \tag{5}$$

Далее наложим систему «повёрнутых и изменённых» зарядов на исходную систему зарядов. Тогда в центре O многоугольника, согласно принципу суперпозиции полей, суммарная напряженность $\vec{E}_s$ электростатического поля (см. Рис. 03) будет равна сумме двух векторов

$$\vec{E}_s = \vec{E}_2 + \vec{E}_2^{**}\,. \tag{6}$$

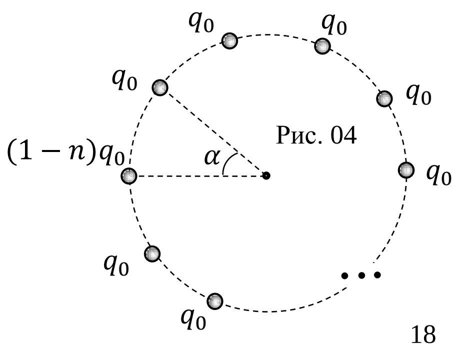


Рис. 04

Однако, с другой стороны (Рис. 04), при такой процедуре во всех точках (за исключением первой!) по правилам арифметической прогрессии останется только «по одному» заряду q_0.

В первой же точке системы окажется суммарный заряд $(1-n)q_0$, который является «совокупностью» зарядов q_0 (старого) и $(-nq_0)$, «пришедшего» в эту точку при повороте.

Таким образом, в полученной «наложенной» системе (см. Рис. 04) во всех вершинах многоугольника теперь находится по заряду q_0 (согласно пункту **1.1** поле такой системы равно нулю), и в первой точке «появился» заряд $(-nq_0)$.

Следовательно, суммарное поле $\vec{E}_S$ такой «наложенной» системы зарядов в центре O многоугольника совпадает с полем отрицательного заряда $(-nq_0)$, находящегося в первой точке цепочки, т.е.

$$E_S = \frac{nq_0}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,. \tag{7}$$

С другой стороны из равнобедренного треугольника напряженностей (см. Рис. 03) получим

$$E_S = 2E_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad E_2 = \frac{E_S}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\,. \tag{8}$$

Из (7) и (8) получаем искомое значение

$$E_2 = \frac{nq_0}{8\pi\varepsilon_0 R^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{nq_0}{8\pi\varepsilon_0 R^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{n}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} E_0\,, \tag{9}$$

где $E_0 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ есть напряженность поля, создаваемого в центре многоугольника первым (наименьшим) зарядом.

Для задания вектора $\vec{E}_2$ помимо его модуля (9) необходимо определить также и его направление в плоскости рисунка. На практике для этого достаточно найти угол, образуемый данным вектором с какой либо осью или отрезком.

В нашем случае удобно найти угол β, образованный искомым вектором $\vec{E}_2$ с радиусом, проведенным из центра O многоугольника к первому заряду (см. Рис. 03).

Из равнобедренного треугольника напряженностей, учитывая равенство углов при основании, найдем

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = \frac{n-2}{2n}\pi\,. \tag{10}$$

Выражения (9) и (10) полностью задают искомый вектор $\vec{E}_2$, приложенный в точке O (центре правильного n – угольника, где $n \geq 2$).

Интересно, что при $n = 2$ «правильный многоугольник» представляет собой два заряда q_0 и $2q_0$, находящиеся на концах диаметра окружности (т.е. с точки зрения математики его «не существует», т.к. класс правильных многоугольников начинается с правильного треугольника $(n = 3)$). Но, несмотря на это, формулы (9) и (10) дают правильные физические результаты $(E_2 = E_0,\ \beta = 0)$!

1.3 Для вычислений с использованием (9) и (10) необходимо знать количество вершин n правильного многоугольника.

Из Рис. 02 следует, что для того, чтобы вектор $\vec{E}_2$ проходил (был «нацелен») через третью вершину многоугольника, угол φ должен удовлетворять условию

$$\beta = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{n-2}{2n}\pi = 2\frac{2\pi}{n} \quad \Rightarrow \quad n = 10\,. \tag{11}$$

Следовательно, искомый правильный многоугольник является правильным десятиугольником ($n = 10$). В таком случае

$$\alpha = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} = 0{,}628 \text{ рад} = 36{,}0° \,. \tag{12}$$

Расчеты по найденным формулам (9) и (10) дают

$$E_2 = \frac{10 \cdot 151 \times 10^{-9}}{8 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \times 10^{-12} (1{,}52)^2 \times \sin\left(\frac{6{,}28}{10}\right)} \frac{\text{В}}{\text{м}} = \{5003{,}785076\}^{1} = 5{,}00 \cdot 10^3 \ \frac{\text{В}}{\text{м}} = 5{,}00 \ \frac{\text{кВ}}{\text{м}} \,, \tag{13}$$

$$\beta = \frac{10-2}{2 \cdot 10}\pi = \frac{2\pi}{5} = 1{,}26 \text{ рад} = 72{,}0° \,. \tag{14}$$

По правилам приближенных вычислений в окончательных расчётах сохраняем по три значащие цифры, поскольку все данные условия приведены с тремя значащими цифрами (не путать с цифрами после запятой!).

Часть 2. Геометрическая электростатика

2.1 Из-за малости заряженных шариков можно считать все заряды в вершинах многоугольника точечными.

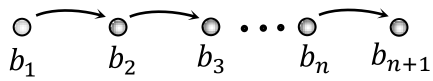
Как следует из закона Кулона, первый заряд цепочки $q_1 = q_0$ создает в центре O многоугольника напряженность электростатического поля

$$E_0 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \{587{,}972293\} = 588 \ \frac{\text{В}}{\text{м}} \,, \tag{15}$$

причем вектор $\vec{E}_0$ направлен вдоль радиуса описанной окружности от заряда q_1 к центру O многоугольника (Рис. 05).

2.2 Как известно, при геометрической прогрессии каждый ее следующий член больше предыдущего члена в одно и то же число раз. Соответственно, если умножить все члены геометрической прогрессии на ее знаменатель q, то ее первый член b_1 перейдет во второй b_2, второй b_2 – в третий b_3 и т.д. При этом вся цепочка «сдвинется» на один шаг влево (Рис. 05).

Рис. 05



Это соображение и положим в основу следующего модернизированного «метода поворота» для вычисления напряжённости $\vec{E}_3$ электростатического поля, создаваемого данной системой электрических зарядов.

Умножим все заряды системы на 2 (т.е. на знаменатель q геометрической прогрессии) и повернем систему на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ так, чтобы каждый заряд «перешел» в соседнюю позицию (Рис. 06).

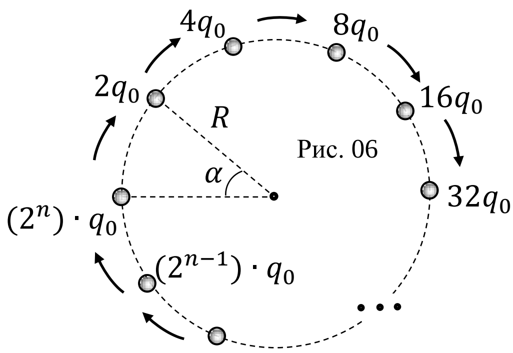


Рис. 06

Понятно, что после такого «искусственного» преобразования и поворота системы зарядов вектор $\vec{E}_3^*$ ее новой напряженности поля также удвоился по модулю (стал $2E_3$) и также повернулся на угол α относительно своего начального положения, что удобно изобразить на векторной диаграмме (Рис. 07).

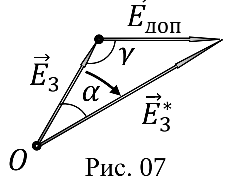


Рис. 07

[1] — здесь и далее: в фигурных скобках представлены (без размерности!) показания инженерного калькулятора (например, CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)) при правильном расчёте.

С другой стороны, как следует из Рис. 06, «сторонний наблюдатель» отметит, что после такой операции все заряды (за исключением первого) не изменились и «остались на своих местах». Только в первой вершине правильного многоугольника «исчез» заряд q_0, но «появился» новый заряд $(2^n) \cdot q_0$.

Но мы можем считать, что в первой вершине многоугольника одновременно находятся два заряда: первый заряд q_0 , а второй $(2^n - 1) \cdot q_0$. Тогда можно сказать, что старая система зарядов «осталась» на месте, но в ее первой точке появился дополнительный заряд $(2^n - 1) \cdot q_0$.

Этот заряд создает в центре многоугольника дополнительную напряженность $\vec{E}_{\text{доп}}$ электростатического поля

$$\vec{E}_{\text{доп}} = (2^n - 1) \cdot \vec{E}_0. \tag{16}$$

Как следует из (16) вектор этой дополнительной напряженности поля направлен вдоль радиуса к центру O многоугольника (см. Рис. 07), т.е. так же, как и вектор $\vec{E}_0$.

Из векторного треугольника напряжённостей (Рис. 07) выразим итоговый вектор $\vec{E}_3^*$ и запишем теорему косинусов для стороны треугольника $\vec{E}_{\text{доп}}$ с учетом (16)

$$\vec{E}_3^* = \vec{E}_3 + \vec{E}_{\text{доп}} , \tag{17}$$

$$(E_{\text{доп}})^2 = (E_0 \cdot (2^n - 1))^2 = E_3^2 + 4E_3^2 - 2E_3(2E_3)\cos\alpha . \tag{18}$$

Из (18) находим искомое значение

$$E_3 = \frac{2^n - 1}{\sqrt{5 - 4\cos\alpha}} E_0 = \{(15)\} = \frac{(2^n - 1) \cdot q_0}{4\pi\varepsilon_0 R^2 \sqrt{5 - 4\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}} . \tag{19}$$

Для задания направления вектора $\vec{E}_3$ найдем по теореме синусов угол γ треугольника, противолежащий стороне $\vec{E}_3^*$

$$\frac{E_{\text{доп}}}{\sin\alpha} = \frac{E_3^*}{\sin\gamma} = \frac{2E_3}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = \frac{2E_3}{E_{\text{доп}}} \sin\alpha . \tag{20}$$

С учетом (16) и (19) окончательно получаем

$$\sin\gamma = \frac{2(2^n - 1)}{\sqrt{5 - 4\cos\alpha}} E_0 \cdot \frac{\sin\alpha}{E_0 \cdot (2^n - 1)} = \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{5 - 4\cos\alpha}} = \frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\sqrt{5 - 4\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}} . \tag{21}$$

Выражения (19) и (21) полностью задают искомый вектор $\vec{E}_3$, приложенный в точке O (центре правильного n – угольника).

2.3 Для вычислений с использованием (19) и (21) необходимо знать количество вершин n правильного многоугольника.

Согласно условию, для искомого многоугольника $\vec{E}_3 \perp \vec{E}_0$, т.е. треугольник напряженностей (см. Рис. 7) – прямоугольный. Следовательно, в этом случае

$$\sin\gamma = \sin\frac{\pi}{2} = 1 = \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{5 - 4\cos\alpha}} . \tag{22}$$

Из (22) получаем квадратное уравнение относительно $\cos\alpha$, единственный корень которого

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3} = 60° . \tag{23}$$

Из (23) находим число сторон n правильного многоугольника

$$n = \frac{2\pi}{\alpha} = 6 , \tag{24}$$

т.е. в данном случае получается правильный шестиугольник.

Расчеты по найденным формулам (9) и (10) дают

$$E_3 = \frac{(2^6-1)\cdot 151\times 10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\times 10^{-12}\cdot (1{,}52)^2\sqrt{5-4\cos\left(\frac{6{,}28}{6}\right)}} = \{21392{,}91265\} = 21{,}4\cdot 10^3\left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\right) = 21{,}4\left(\frac{\text{кВ}}{\text{м}}\right). \quad (25)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} = 1{,}57\ \text{рад} = 90{,}0^\circ\ . \quad (26)$$

По правилам приближенных вычислений в окончательных расчётах сохраняем по три значащие цифры, поскольку все данные условия приведены с тремя значащими цифрами (не путать с цифрами после запятой!).