Решение:

Задание 9-1. Прогрессивная динамика

1.1 Прямой метод решения предполагает нахождение проекции каждой силы на соответствующую ось и дальнейшее суммирование проекций по каждой из осей.

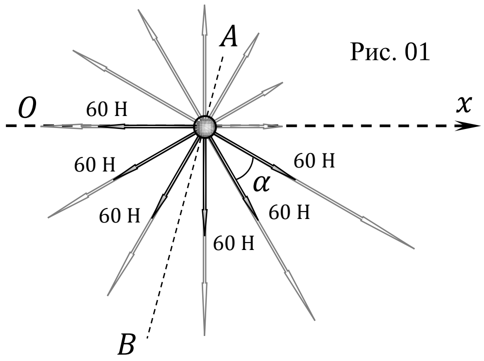

Рис. 01

Однако задачу можно решить проще (и короче!) если заметить, что в данной системе разность противоположных по направлению сил (70 Н и 10 Н, 80 Н и 20 Н и т.д.) попарно остается постоянной и равной $F_0 = 60$ Н.

Это обстоятельство позволяет упростить систему до шести симметричных сил с модулем F_0 (Рис. 01), сумма которых будет направлена вдоль оси симметрии AB и равна

$$F = 2F_0(\cos 15° + \cos 45° + \cos 75°)\ . \qquad (1)$$

Согласно второму закону Ньютона, ускорение $\vec{a}_1$ материальной точки будет также направлено вдоль прямой AB (под углом $\beta = 105°$ к оси Ox) и равно

$$a_1 = \frac{F}{m} = \frac{2F_0(\cos 15°+\cos 45°+\cos 75°)}{m}\ . \qquad (2)$$

Расчет по (2) с точностью до двух значащих цифр дает

$$a_1 = \frac{2\cdot 60\cdot(\cos 15°+\cos 45°+\cos 75°)}{23{,}2}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = \{9{,}992336134\}^{1} = 10\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) \qquad (3)$$

Интересно, что значение (3) для a_1 «совпало» со значением g , используемом на централизованном тестировании (☺), хотя в этом задании мы его не учитывали

$$a_1 = \text{g}_{\text{цт}} = 10\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right).$$

1.2 По определению равнодействующая $\vec{F}$ равна сумме всех сил, действующих на материальную точку

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n\ . \qquad (4)$$

Заметим, что модули сил, действующих на материальную точку, образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Следовательно, для модуля силы F_n справедлива формула

$$F_n = F_1 + (n-1)\Delta F. \qquad (5)$$

Кроме того, при арифметической прогрессии для любых соседних членов F_{i+1} и F_i выполняется равенство

$$F_{i+1} - F_i = \Delta F = \text{const}. \qquad (6)$$

Для практического использования свойства (6) на векторной диаграмме выполним три шага (Рис. 02). Шаг первый: поменяем направление каждого вектора $\vec{F}_i$ на противоположное (т.е. умножим каждый вектор на (-1), при этом он поворачивается на $180°$).

Шаг второй: повернём обращенную систему сил как целое на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ против часовой стрелки (См. Рис. 02).

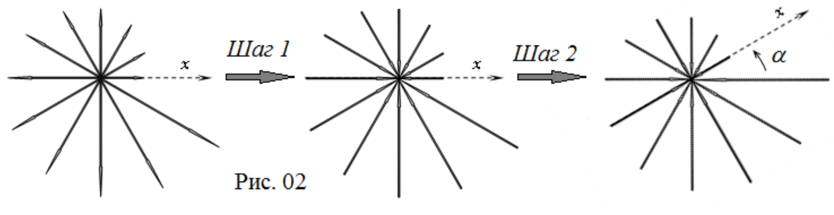

Рис. 02

[1] — здесь и далее: в фигурных скобках представлены (без размерности!) показания инженерного калькулятора (например, CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)) при правильном расчёте.

Шаг третий: наложим полученную после двух шагов систему сил на исходную систему сил так, чтобы их центры совпали. При этом вектор $(-\vec{F}_1)$ попадет на вектор $\vec{F}_2$, вектор $(-\vec{F}_2)$ попадет на вектор $\vec{F}_3$ и т.д., а вот вектор $(-\vec{F}_n)$ попадет на начальный вектор $\vec{F}_1$.

Из (6) следует, что после суммирования наложенных векторов получится система из $(n-1)$ равных по модулю векторов ΔF, повернутых на угол α друг относительно друга, и вектор $(F_1 - F_n)$, параллельный оси Ox (Рис. 03). Вектор $(F_1 - F_n)$ можно представить как

$$F_1 - F_n = F_1 - (F_1 + (n-1)\Delta F) = -(n-1)\Delta F = -n\Delta F + \Delta F \ . \tag{7}$$

По правилу многоугольника теперь сумма n одинаковых по модулю векторов ΔF, повернутых на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ друг относительно друга, равна нулю. Следовательно, согласно (7), после наложения двух систем «останется» только вектор $-n\Delta F$, направленный против оси Ox.

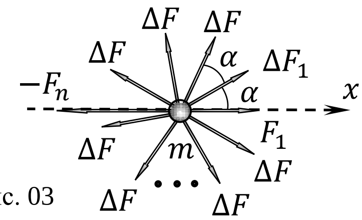

Рис. 03

Изобразим на векторной диаграмме (Рис. 04) все сказанное: отложим вектор $\vec{F}$, далее $(-\vec{F})$ после первого шага, далее $\vec{F}^*$ после второго шага. Их сумма (третий шаг) должна давать вектор $(-n\Delta F)$, отмеченный пунктиром.

По правилу сложения векторов получаем равнобедренный векторный треугольник (см. Рис. 04), из которого можем записать

$$n\Delta F = 2F\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{n\Delta F}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \tag{8}$$

где F – модуль равнодействующей силы.

Интересно, что модуль F равнодействующей не зависит от F_1, а определяется только разностью ΔF арифметической прогрессии и количеством n ее членов. Это и понятно, по тому же правилу многоугольника векторная сумма всех членов F_1 равна нулю.

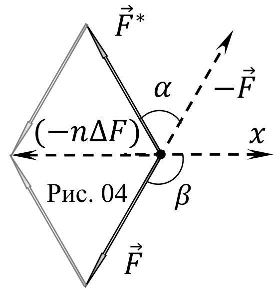

Рис. 04

Напомним, что для задания вектора $\vec{F}$ помимо модуля (8) необходимо также обязательно определить и его направление в плоскости рисунка. На практике для этого достаточно найти угол, образуемый данным вектором с какой либо осью или отрезком.

В нашем случае удобно найти угол β, образованный искомым вектором $\vec{F}$ с осью Ox, (см. Рис. 04).

Из равнобедренного треугольника сил, учитывая, что $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ и углы при основании равны, найдем

$$\beta = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} = \frac{n+2}{2n}\pi \ . \tag{9}$$

Выражения (8) и (9) полностью задают искомый вектор $\vec{F}$, приложенный к материальной точке (где $n \geq 2$).

Для модуля ускорения a_2 материальной точки окончательно получаем

$$a_2 = \frac{F}{m} = \frac{n\Delta F}{2m\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}, \tag{10}$$

причем вектор $\vec{a}_2$ будет направлен под углом

$$\beta = \frac{n+2}{2n}\pi \qquad (11)$$

к оси Ox ($n \geq 2$).

1.3 Для вычислений с использованием (10) и (11) из условия задачи найдем необходимые параметры: $n = 12$; $\Delta F = 10$ Н . После подстановки получаем

$$a_1 = \frac{12 \cdot 10}{2 \cdot 23{,}2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = \{9{,}992336134\} = 10\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right), \qquad (12)$$

$$\beta = \frac{12+2}{2 \cdot 12}\pi = \frac{7}{12}\pi = 105°. \qquad (13)$$

Сравнивая (12) и (13) с (2) и (3), не только испытываешь чувство удовлетворения (физика – наука точная!), но и понимаешь, насколько труднее получить общее решение по сравнению с частным, отдельным случаем. Но это всегда гораздо престижнее… ☺