Решение:

Задание 9-2. «Двойное скольжение»

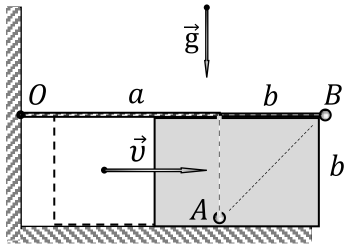


Рис. 01

1.1 «Шарик и параллелепипед» Поскольку движение параллелепипеда равномерное и прямолинейное, то логично предположить, что шарик также будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{u}_1$ под некоторым углом α к горизонту.

В таком случае для нахождения скорости нет необходимости рассматривать малые промежутки времени Δt, а можно выбрать любой удобный конечный промежуток времени t.

Воспользуемся этим соображением и рассмотрим систему через промежуток времени t, когда параллелепипед сместился вправо на длину вертикальной стороны b (Рис. 01)

$$b = vt. \tag{1}$$

Поскольку нить нерастяжима, то при этом шарик поднялся по вертикальной стенке параллелепипеда до его вершины B (см. Рис. 01).

Следовательно, его перемещение AB (по модулю) составило гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника

$$AB = \sqrt{2}b. \tag{2}$$

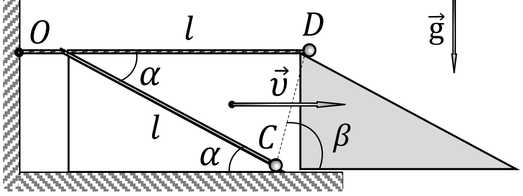
Соответственно, искомая скорость $\vec{u}_1$ шарика будет направлена вдоль гипотенузы AB (под углом $\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$ к горизонту) и равна по модулю

$$u_1 = \frac{AB}{t} = \frac{\sqrt{2}b}{b/v} = v\sqrt{2} = \sqrt{2}v. \tag{3}$$

Таким образом, траектория шарика будет представлять собой отрезок AB, также направленный под углом $\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$ к горизонту, длиной

$$AB = b\sqrt{2} = \sqrt{2}b. \tag{4}$$

Как следует из (4), сторона a параллелепипеда не влияет на решение данной задачи – она может быть любой. Эта сторона параллелепипеда играет существенную роль только при рассмотрении дальнейшего движения системы. ☺

Рис. 02


1.2 «Шарик и наклонная плоскость» Применяя те же общие рассуждения, что и в предыдущем пункте, делаем вывод, что и в этом случае шарик будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{u}_2$ под некоторым углом β к горизонту.

Соответственно, рассмотрим систему через промежуток времени t, когда наклонная плоскость сместился вправо на свою длину l (Рис. 02)

$$l = vt. \tag{5}$$

Поскольку нить нерастяжима, то при этом шарик поднялся по наклонной плоскости до ее вершины D (см. Рис. 02).

Следовательно, его перемещение CD (по модулю) составило основание равнобедренного треугольника с углом α при вершине

$$CD = 2l\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (6)$$

Соответственно, искомая скорость $\vec{u}_2$ шарика будет направлена вдоль основания CD равнобедренного треугольника под углом β к горизонту

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}. \quad (7)$$

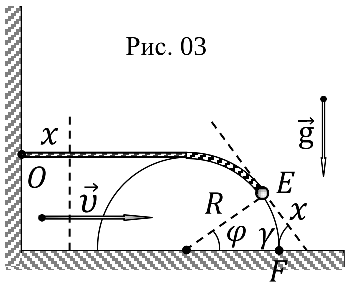
Модуль u_2 скорости $\vec{u}_2$ при этом будет

$$u_2 = \frac{CD}{t} = \frac{2l\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{l/v} = 2v\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (8)$$

Таким образом, траектория шарика будет представлять собой отрезок CD, направленный под углом $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ к горизонту, длиной

$$CD = 2l\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (9)$$

Интересно, что при $\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$ из (8) и (9) получаем формулы (3) и (4) из предыдущего пункта, поскольку вертикальную стенку параллелепипеда можно считать «наклонной плоскостью» с прямым углом. Физика рулит! ☺



1.3 «Шарик и полусфера» Движение полусферы равномерное, следовательно, через промежуток времени t она пройдет по плоскости расстояние (Рис. 03)

$$x = vt. \quad (10)$$

В силу нерастяжимости нити шарик пройдет по полусфере такое же расстояние x и окажется в точке E (см. Рис. 03), причем длина дуги EF будет равна

$$\breve{EF} = x = vt = \varphi R. \quad (11)$$

Из (11) находим угол φ

$$\varphi = \frac{x}{R} = \frac{vt}{R}. \quad (12)$$

Проведем касательную к полусфере в точке нахождения шарика в данный момент времени (см. Рис. 03). Она будет образовывать с горизонтом угол γ, который равен

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi. \quad (13)$$

Для мгновенного движения шарика маленький участок полусферы можно считать прямым участком движущейся наклонной плоскости, составляющей такой же угол γ с горизонтом. А это значит, что можно воспользоваться формулами (7) и (8) из предыдущего пункта задачи для наклонной плоскости, в которые вместо угла α подставить угол $\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Следовательно, модуль мгновенной скорости шарика u_3 будет равен

$$u_3(\varphi) = 2v\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2v\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2}\right) = 2v\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \quad (14)$$

или

$$u_3(x) = 2v\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2R}\right), \quad (15)$$

или

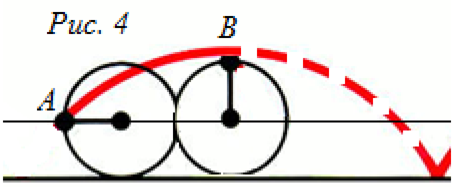
$$u_3(t) = 2v\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{vt}{2R}\right). \quad (16)$$

Скорость $\vec{u}_3$ в данный момент будет направлена под углом к горизонту

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2R} = \frac{\pi}{4} + \frac{vt}{2R}. \quad (17)$$

В частности, в момент начала движения $(\varphi = 0)$ угол $\delta = \frac{\pi}{4}$, при этом шарик находится у практически вертикальной стенки полусферы, т.е. как в первом пункте задачи (с параллелепипедом). И там, действительно, угол был 45 градусов.

В данном пункте (это несложно обосновать), траекторией движения шарика будет участок AB циклоиды (Рис. 4), т.е. кривой, которую описывает в пространстве точка на ободе кольца, катящегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности.



Существенными параметрами циклоиды являются высота арки циклоиды $(h = 2R)$ и расстояние $(S = 2\pi R)$ между точками касания поверхности качения.