Решение:

Задание 9-3. «Конечная бесконечность»

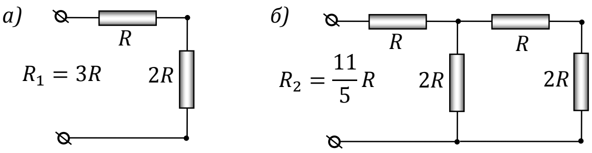

Рис. 01

1.1 «Шаг за шагом …» Для реализации первого шага предложенного алгоритма найдем сопротивления одного звена R_1 (Рис. 01, а)) и двух звеньев R_2 (Рис. 01, б))

$$R_1 = R + 2R = 3R\ , \tag{1}$$

$$R_2 = R + \frac{2R \cdot R_1}{2R + R_1} = R + \frac{2R \cdot 3R}{2R + 3R} = \left(1 + \frac{6}{5}\right)R = \frac{11}{5}R = 2\frac{1}{5}R\ . \tag{2}$$

Тогда для первого шага ($n = 1$) в рамках предложенной схемы оценки R_∞^* относительная погрешность равна

$$\varepsilon_1 = \frac{R_1 - R_2}{R_1} = \frac{3 - \frac{11}{5}}{3} = \frac{4}{15} = 27\ \%\ . \tag{3}$$

Поскольку ε_1 существенно больше одного процента $\varepsilon_1 \gg 1\ \%$, то продолжим процедуру далее.

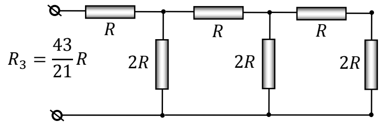

Рис. 02

Для второго шага ($n = 2$) вычислим сопротивление трех звеньев цепи (Рис. 02) с учетом того, что сопротивление двух звеньев R_2 мы уже знаем

$$R_3 = R + \frac{2R \cdot R_2}{2R + R_2} = R + \frac{2R \cdot \frac{11R}{5}}{2R + \frac{11R}{5}} = \left(1 + \frac{22}{21}\right)R = \frac{43}{21}R = 2\frac{1}{21}R\ , \tag{4}$$

Следовательно

$$\varepsilon_2 = \frac{R_2 - R_3}{R_2} = \frac{\frac{11}{5} - \frac{43}{21}}{\frac{11}{5}} = \frac{16}{231} = 6{,}9\ \%\ . \tag{5}$$

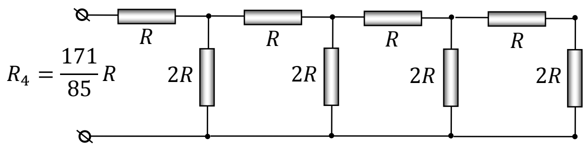

Рис. 03

Хотя тенденция и наметилась, но продолжаем процедуру далее, поскольку $\varepsilon_2 > 1\ \%$.

Для третьего ($n = 3$) шага вычислим сопротивление R_4 четырех звеньев цепи с учетом (4) (Рис. 03) и правил вычисления батарей резисторов

$$R_4 = R + \frac{2R \cdot R_3}{2R + R_3} = R + \frac{2R \cdot \frac{43}{21}R}{2R + \frac{43}{21}R} = \left(1 + \frac{86}{85}\right)R = \frac{171}{85}R = 2\frac{1}{85}R\ . \tag{6}$$

Тогда

$$\varepsilon_3 = \frac{R_3 - R_4}{R_3} = \frac{\frac{43}{21} - \frac{171}{85}}{\frac{43}{21}} = \frac{64}{3655} = 1{,}8\ \%\ , \tag{7}$$

т.е. осталось совсем немного, поскольку погрешность оценки близка к одному проценту.

На четвертом шаге ($n = 4$) нам потребуется также вычислить R_5 (с учетом (6))

$$R_5 = R + \frac{2R \cdot R_4}{2R + R_4} = R + \frac{2R \cdot \frac{171}{85}R}{2R + \frac{171}{85}R} = \left(1 + \frac{342}{341}\right)R = \frac{683}{341}R = 2\frac{1}{341}R\ . \tag{8}$$

Соответственно, для ε_4 получим

$$\varepsilon_4 = \frac{R_4 - R_5}{R_4} = \frac{\frac{171}{85} - \frac{683}{341}}{\frac{171}{85}} = \frac{256}{58311} = 0{,}44\ \% \ . \tag{9}$$

Это победа! Таким образом, уже на четвертом шаге ($n = 4$) мы получили оценку R_∞^* с неплохой точностью (менее одного процента!)

$$R_\infty^* \approx R_n = R_4 = \frac{171}{85} R = 2\frac{1}{85} R = 2{,}012\ R\ . \tag{10}$$

Интересно, что на следующем (пятом) шаге (от школьников не требуется!) погрешность составит совсем малую величину (сотые доли процента!)

$$\varepsilon_5 = \frac{R_5 - R_6}{R_5} = \frac{\frac{683}{341} - \frac{2730}{1364}}{\frac{683}{341}} = \frac{1}{1366} = 0{,}073\ \% \ ,$$

так что результат $R_5 = \frac{683}{341} = 2\frac{1}{341} R = 2{,}00293R$ уже предельно близок к точному значению R_∞^*.

Анализируя полученные результаты R_n, делаем «осторожное предположение», что все они монотонно стремятся к значению $R_\infty^* = 2R$, поскольку по мере роста n целая часть дроби перестала меняться, а дробная часть продолжала уменьшаться. ☺

1.2 «Линейная бесконечность» Для прямого расчета $R_\infty^* = R_\infty$ используется метод «отбрасывания одного звена» или, как шутят олимпиадники, «метод песчинки». (Если от кучи песка отнять песчинку, то все равно останется куча. Если от бесконечности отнять единицу, то останется бесконечность. ☺)

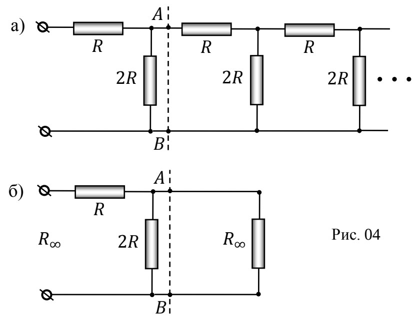

Рис. 04

Отсечем от схемы первое звено по линии AB (Рис. 04, а)). Электрическая цепь правее линии AB по-прежнему содержит бесконечное число повторяющихся звеньев («принцип песчинки»), т.е. её сопротивление будет равно R_∞. Следовательно, схему можно перечертить так, как показано на Рис. 04, б). Тогда по правилам расчета электрических сопротивлений получаем

$$R_\infty = R + \frac{2R \cdot R_\infty}{2R + R_\infty}\, . \tag{11}$$

Из (11) после преобразований получаем квадратное уравнение относительно R_∞

$$R_\infty^2 - R_\infty R - 2R^2 = 0\ , \tag{12}$$

решения которого имеют вид

$$\begin{aligned} R_{\infty 1} &= \frac{R + \sqrt{9R^2}}{2} = 2R \\ R_{\infty 2} &= \frac{R - \sqrt{9R^2}}{2} = -R \end{aligned}\ . \tag{13}$$

Второй (отрицательный) корень отбрасываем, поскольку он не имеет физического смысла – сопротивление по определению положительно. Таким образом, сопротивление данной бесконечной цепочки действительно конечно и равно

$$R_\infty^* = 2R. \tag{14}$$

Если вдуматься, то ничего удивительного здесь нет, поскольку последовательное соединение большого числа резисторов увеличивает сопротивление цепи (до бесконечности), а параллельное – уменьшает (до нуля). Вот и получилась у них «боевая ничья». ☺

1.3 «Плоская бесконечность» При параллельном соединении двух одинаковых резисторов их общее сопротивление уменьшается в два раза, а при последовательном – увеличивается в такое же количество раз.

Удачно комбинируя такие соединения, можно собрать схему с указанными в условии свойствами, т.е. получить «постоянное» сопротивление плоской бесконечной цепи при добавлении следующего звена.

Один из возможных вариантов представлен на Рис. 05.

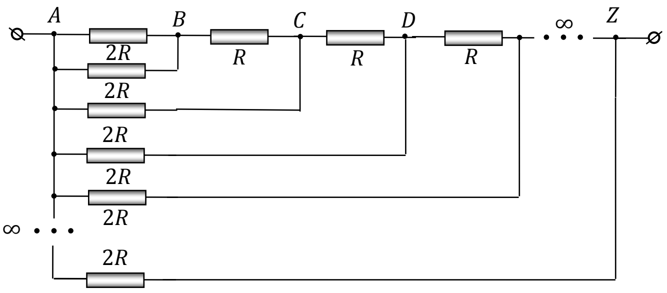

Рис. 05

Понятно, что сопротивление такой бесконечной цепи на плоскости просто равно сопротивлению ее первого звена

$$R_{\infty}^{**} = R_{AZ} = R_{AB} = R. \quad (15)$$