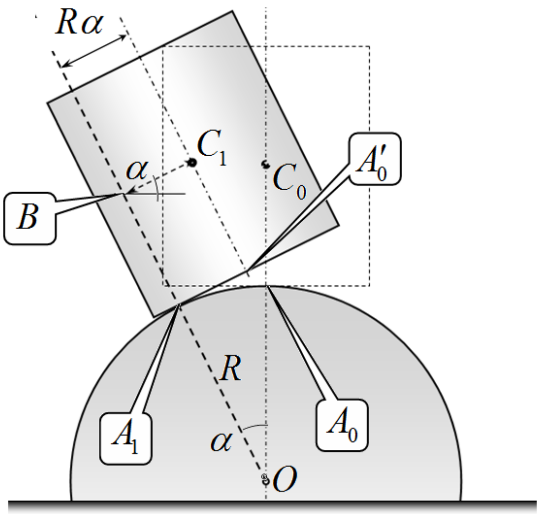
## Задание 1. Цирковая разминка (Решение)

**1.** Условие равновесия тела – сумма сил и сумма моментов сил, действующих на тело равны нулю. При вертикальном положении цилиндра, когда его ось проходит через центр шара, эти условия выполняются. Следовательно, описанное положение цилиндра является положением равновесия не зависимо от радиуса шара и высоты цилиндра.

Для того, чтобы положения равновесия было устойчивым, необходимо, чтобы при отклонении от положения равновесия возникали силы (или моменты сил), стремящиеся вернуть тело в исходное положение. Это условие также может сформулировано иначе: положению устойчивого равновесия соответствует минимум потенциальной энергии.

Так как в рассматриваемой системе потенциальная энергия есть потенциальная энергия в поле тяжести, то условие минимума упрощается: при отклонении цилиндра от вертикального положения его центр масс должен подниматься.

Сделаем рисунок, позволяющий получить условия устойчивости равновесия цилиндра. На рисунке пунктиром показано вертикальное положение цилиндра: $C_0$ - положение центра масс (на расстоянии $\frac{h}{2}$ от основания цилиндра); $A_0$ - точка касания на шаре, на основании цилиндра это центр основания. При отклонении от вертикального положения цилиндр прокатывается по поверхности шара. Пусть при отклонении оси цилиндра на угол $\alpha$ от вертикали, точка касания смещается – на рисунке это точка $A_1$. Точка $A_0'$ - центр основания цилиндра после его поворота. так качение происходит без проскальзывания, то длина дуги $|A_0A_1| = R\alpha$ равна длине отрезка $A_0'A_1$ на основании цилиндра (этот отрезок – множество точек касания при наклоне цилиндра). $C_1$ - положение центра масс отклоненного цилиндра. Проведем прямую, проходящую через центр шара $O$ и точку касания $A_1$ продлим ее до точки $B$, находящейся на расстоянии $\frac{h}{2}$ от основания цилиндра. Из рисунка следует, что высота центра масс цилиндра $C_1$ над центром шара равна




$$H = \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\alpha + R\alpha\sin\alpha \qquad (1)$$

Поэтому изменение этой высоты при отклонении цилиндра от вертикального положения равно

$$\Delta H = \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\alpha + R\alpha\sin\alpha - \left(R + \frac{h}{2}\right). \qquad (2)$$

Как было отмечено ранее, условие устойчивости – найденное изменение высоты центра масс должно быть положительным. Решить соответствующее неравенство аналитически невозможно, поэтому следует воспользоваться тем, что угол отклонения должен быть малым. В этом случае можно воспользоваться приближенными формулами

$$\sin\alpha \approx \alpha; \quad \cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}. \qquad (3)$$

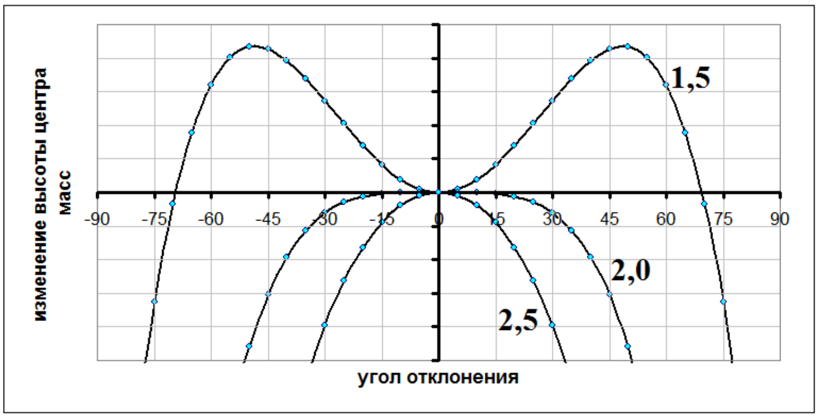
В этом приближении формула (2) приобретает вид

$$\Delta H = \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\alpha + R\alpha\sin\alpha - \left(R + \frac{h}{2}\right) \approx -\left(R + \frac{h}{2}\right)\frac{\alpha^2}{2} + R\alpha^2 = \left(\frac{R}{2} - \frac{h}{4}\right)\alpha^2 . \quad (4)$$

Из условия $\Delta H > 0$, следует, что условие устойчивости вертикального положения цилиндра имеет вид:

$$\boxed{\frac{h}{R} < 2 .} \quad (5)$$

*Для подтверждения справедливости проведенных рассуждений и расчетов приведем графики функции (2) при нескольких значениях величины $\frac{h}{R}$ (значения указаны на графике. (от участников олимпиады построение этого графика не требуется).*




**«Моментный» вариант решения.**

Чтобы цилиндр после отклонения от вертикали возвращался в исходное положение, необходимо, чтобы момент силы тяжести «заставлял» его вернуться обратно. С помощью построенного рисунка можно заметить. что это будет выполняться при выполнении условия: Вертикаль, проходящая через точку $C_1$ (вдоль нее направлена сила тяжести) должна проходить правее точки касания $A_1$. Математически это условие можно записать в виде:

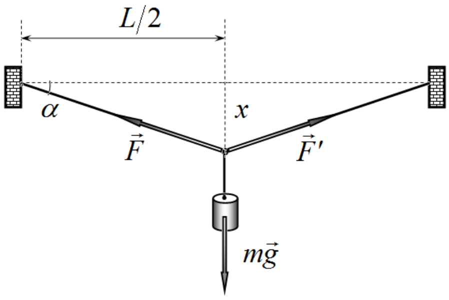
$$\frac{h}{2}\sin\alpha < R\alpha\cos\alpha . \quad (4)$$

Используя приближенные формулы $\sin\alpha \approx \alpha; \quad \cos\alpha \approx 1$, легко получаем решение (5).

**Задача 2. Канатоходцы**

Прежде всего, обратим внимание, что относительные деформации проволоки малы (максимальная деформация немного превышает 5%). Поэтому при решении задачи можно считать, что провисание проволоки также является малой величиной $x << L$

Так как задана зависимость силы упругости от относительной деформации, то необходимо получить аналогичную зависимость, связанную, кроме того, с силой тяжести.




Выразим удлинение проволоки с величиной провисания:

$$\Delta l = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2} - \frac{L}{2}. \qquad (1)$$

Воспользуемся малостью величины $x$, и упростим данную формулу (используя приближенную формулу для степенной зависимости):

$$\Delta l = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2} - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}\left(1 + \left(\frac{2x}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{L}{2} \approx \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{L}\right)^2\right) - \frac{L}{2} = \frac{x^2}{L}. \qquad (2)$$

Эта величина представляет удлинение половины проволоки, поэтому ее относительное удлинение равно

$$\varepsilon = 2\frac{\Delta l}{L} = 2\frac{x^2}{L^2}. \qquad (3)$$

Условие равновесия груза имеет вид

$$2F\sin\alpha = mg\,, \qquad (4)$$

где $\alpha$ малый угол, который проволока образует с горизонтом (см. рис). Так угол мал, то можно записать приближенное выражение

$$\sin\alpha \approx \alpha = \frac{2x}{L}. \qquad (5)$$

Из формулы (3) выразим $\frac{x}{L} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ и подставим в уравнение (4):

$$F = \frac{mg}{2\alpha} = \frac{mg}{4\frac{x}{L}} = \frac{mg}{4\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}} = \frac{mg}{\sqrt{8\varepsilon}}. \qquad (6)$$

**2.1** Используя это уравнение, найдем значение массы груза, при котором деформация проволоки линейно зависит от относительной деформации. Для этого в уравнение (6) подставим значения относительной деформации и силы упругости, соответствующие точке 1:

$$m_1 = \frac{F_1\sqrt{8\varepsilon_1}}{g} = \frac{310\sqrt{8\cdot 2{,}4\cdot 10^{-3}}}{9{,}8} \approx 4{,}3\text{кг}. \qquad (7)$$

Масса подвешенного груза меньше этой величины, поэтому искомые значения лежат в области линейной зависимости силы упругости от относительной деформации:

$$F = \frac{F_1}{\varepsilon_1}\varepsilon\,, \qquad (8)$$

где $\frac{F_1}{\varepsilon_1}$ - коэффициент наклона линейного участка диаграммы растяжения. Из формул (6), (8) и (3) получаем:

$$\frac{F_1}{\varepsilon_1}\varepsilon = \frac{mg}{\sqrt{8\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^{\frac{3}{2}} = \frac{mg}{\sqrt{8}}\frac{\varepsilon_1}{F_1} \quad \Rightarrow \quad \left(2\frac{x^2}{L^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}\left(\frac{x}{L}\right)^3 = \frac{mg}{\sqrt{8}}\frac{\varepsilon_1}{F_1} \qquad (9)$$

Откуда окончательно находим

$$\boxed{x = L\sqrt[3]{\frac{mg}{8}\frac{\varepsilon_1}{F_1}} = 2{,}0\cdot\sqrt[3]{\frac{2{,}0\cdot 9{,}8}{8}\frac{0{,}0024}{310}} \approx 5{,}3 см. \qquad (10)}$$

**2.2** Разрыв проволоки происходит при $\varepsilon = \varepsilon_2 = 5{,}10\% = 5{,}1\cdot 10^{-2}$, при этом сила упругости равна $F = F_2 = 0{,}43 кН = 430 Н$. Тогда из уравнения (6) находим максимальную массу подвешенного груза:

$$\boxed{m_2 = \frac{F_2\sqrt{8\varepsilon_2}}{g} = \frac{430\sqrt{8\cdot 5{,}1\cdot 10^{-2}}}{9{,}8} \approx 27 кг. \qquad (11)}$$