Задание 2. Газовые законы (Решение)

Часть 1. Горизонтальный сосуд.

1.1 При достижении термодинамического равновесия выровняются давления и температуры газов обеих частях сосуда:

$$\begin{aligned} P_{1a} &= P_{1b} = P_1 \\ T_{1a} &= T_{1b} = T_1 \end{aligned}. \qquad (1)$$

Для определения параметров газов запишем уравнения Клапейрона для обеих порций газов

$$\frac{P_0V_0}{\frac{3}{2}T_0} = \frac{P_1V_{1a}}{T_1}; \qquad \frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_1V_{1b}}{T_1}. \qquad (2)$$

Разделим уравнения (2) друг на друга

$$\frac{2}{3} = \frac{V_{1a}}{V_{1b}}. \qquad (3)$$

Добавим условие постоянства объема

$$V_{1a} + V_{1b} = 2V_0. \qquad (4)$$

Из этих уравнений следует, что объемы газов станут равными

$$\boxed{V_{1a} = \frac{4}{5}V_0; \quad V_{1b} = \frac{6}{5}V_0.} \qquad (5)$$

Из уравнений (2) найти значения установившихся давлений и температур нельзя, т.к. в них входят только их отношение. Поэтому следует воспользоваться первым законом термодинамики. Так как давления газов на поршень с разных сторон все время одинаковы, то работа газов по перемещению поршня равны нулю. Система теплоизолирована, поэтому внутренняя энергия газов сохраняется.

Внутреннюю энергию одноатомного газа можно рассчитать по формулам

$$U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}PV. \qquad (6)$$

Здесь использовано уравнение состояния идеального газа $PV = \nu RT$.
Уравнения закона сохранения энергии в данном случае имеет вид

$$\frac{3}{2}P_0V_0 + \frac{3}{2}P_0V_0 = \frac{3}{2}P_1 \cdot 2V_0. \qquad (7)$$

из которого следует, что давление газа не изменяется, т.е.

$$\boxed{P_{1a} = P_{1b} = P_0.} \qquad (8)$$

Теперь установившуюся температуру можно найти из любого из уравнений (2):

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_1V_{1b}}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_0\frac{V_{1b}}{V_0}. \qquad (9)$$

Используя найденное значение объема, получаем

$$\boxed{T_{1a} = T_{1b} = \frac{6}{5}T_0} \qquad (10)$$

1.2 Т.к. смещением поршня пренебрегаем, то объемы газов остаются неизменными:

$$V_{2a} = \frac{4}{5}V_0; \quad V_{2b} = \frac{6}{5}V_0. \tag{11}$$

Также остаются неизменными параметры газа в части сосуда ***b:***

$$P_{2b} = P_0; \quad T_{2b} = \frac{6}{5}T_0. \tag{12}$$

В процессе нагревания полученная теплота идет на увеличение внутренней энергии газа в части сосуда ***a***:

$$\frac{3}{2}P_0V_{1a} + Q = \frac{3}{2}P_{2a}V_{1a}. \tag{13}$$

Подставляем известные значения параметров

$$\frac{3}{2}P_0 \cdot \frac{4}{5}V_0 + \frac{1}{2}P_0V_0 = \frac{3}{2}P_{2a} \cdot \frac{4}{5}V_0. \tag{14}$$

и находим

$$P_{2a} = \frac{17}{12}P_0. \tag{15}$$

Значение температуры газа найдем из уравнения состояния Клапейрона (для состояний 0 и 2):

$$\frac{P_0V_0}{\frac{3}{2}T_0} = \frac{P_{2a}V_{2a}}{T_{2a}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2P_0V_0}{3T_0} = \frac{17}{12}P_0 \cdot \frac{4}{5}V_0\frac{1}{T_{2a}}, \tag{16}$$

из которого следует, что температура газа станет равной

$$T_{2a} = \frac{17}{10}T_0. \tag{17}$$

1.3 После установления равновесия температуры и давления газов в разных частях сосуда станут равными

$$\begin{matrix} P_{3a} = P_{3b} = P_3 \\ T_{3a} = T_{3b} = T_3 \end{matrix}. \tag{18}$$

Для упрощения расчетов рассмотрим переход из состояния 0 в конечное состояние 3 (без промежуточных этапов). Первый закон термодинамики приводит к уравнению

$$\frac{3}{2}P_0 \cdot 2V_0 + Q = \frac{3}{2}P_3 \cdot 2V_0, \tag{19}$$

из которого сразу следует, что давление газа будет равно

$$P_{3a} = P_{3b} = \frac{7}{6}P_0. \tag{20}$$

Запишем уравнения состояния для обеих порций газов:

$$\frac{P_0V_0}{\frac{3}{2}T_0} = \frac{P_3V_{3a}}{T_3}; \qquad \frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_3V_{3b}}{T_3}. \tag{21}$$

Сложим эти два уравнения:

$$\frac{5}{3}\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_3 \cdot 2V_0}{T_3}. \tag{22}$$

и найдем значение конечной температуры:

$$T_3 = \frac{6}{5} T_0 \frac{P_3}{P_0} = \frac{7}{5} T_0 . \qquad (23)$$

Таким образом:

$$\boxed{T_{3a} = T_{3b} = \frac{7}{5} T_0 .} \qquad (24)$$

Наконец, значения объем можно выразить из уравнений (21). Если разделить их друг на друга, получим

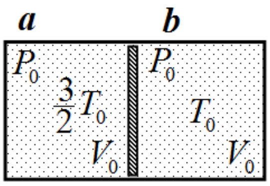
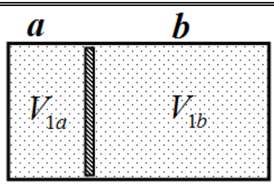
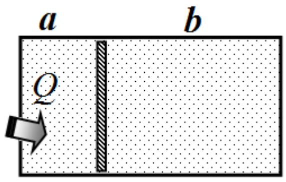
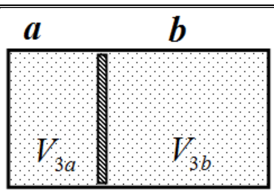
$$\frac{V_{3a}}{V_{3b}} = \frac{2}{3} \qquad (25)$$

Вспоминая. что $V_{1a} + V_{1b} = 2V_0$, находим

$$\boxed{V_{3a} = \frac{4}{5} V_0; \qquad V_{3b} = \frac{6}{5} V_0 .} \qquad (26)$$

Все найденные значения параметров сведены в Таблице 1.

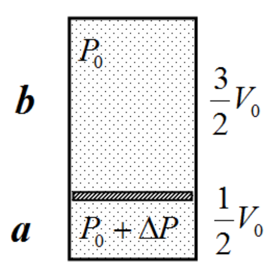
Таблица 1.

№	рисунок	параметры газа в части ***a***	параметры газа в части ***b***
0		$P_{0a} = P_0$	$P_{0b} = P_0$
		$V_{0a} = V_0$	$V_{0a} = V_0$
		$T_{0a} = \frac{3}{2} T_0$	$T_{0b} = T_0$
1		$P_{1a} = P_0$	$P_{1b} = P_0$
		$V_{1a} = \frac{4}{5} V_0$	$V_{1b} = \frac{6}{5} V_0$
		$T_{1a} = \frac{6}{5} T_0$	$T_{1b} = \frac{6}{5} T_0$
2		$P_{2a} = \frac{17}{12} P_0$	$P_{2b} = P_0$
		$V_{2a} = \frac{4}{5} V_0$	$V_{2b} = \frac{6}{5} V_0$
		$T_{2a} = \frac{17}{10} T_0$	$T_{2b} = \frac{6}{5} T_0$
3		$P_{3a} = \frac{7}{6} P_0$	$P_{3b} = \frac{7}{6} P_0$
		$V_{3a} = \frac{4}{5} V_0$	$V_{3b} = \frac{6}{5} V_0$
		$T_{3a} = \frac{7}{5} T_0$	$T_{3b} = \frac{7}{5} T_0$

Часть 2. Вертикальный сосуд.

2. При решении данной задачи нет необходимости рассматривать все этапы процесса, можно сразу рассматривать переход от начального к конечному состоянию. Зная отношение объемов и их сумму, легко найти объемы каждой части сосуда.

начальное состояние



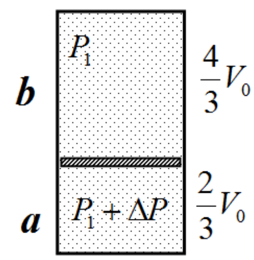
В начальном состоянии:

объем нижней части $V_{0a} = \frac{1}{2}V_0$;

объем верхней части $V_{0b} = \frac{3}{2}V_0$.

Если давление газа в верхней части сосуда равно P_0, то давление в нижней части равно $P_0 + \Delta P$, где ΔP - давление, которое создает поршень.

конечное состояние



В конечном состоянии:

объем нижней части $V_{1a} = \frac{4}{3}V_0$;

объем верхней части $V_{1b} = \frac{2}{3}V_0$.

Обозначим давление газа в верхней части сосуда P_1, тогда давление в нижней части - $P_1 + \Delta P$.

Запишем уравнение первого закона термодинамики:

$$Q = \Delta U + A \tag{27}$$

При вертикальном положении сосуда газ совершает работу по подъему поршня, которая равна

$$A = \Delta P\left(\frac{2}{3}V_0 - \frac{1}{2}V_0\right) = \frac{1}{6}\Delta P V_0. \tag{28}$$

Эта величина также равна изменению потенциальной энергии поршня в поле тяжести Земли. Выразим изменение внутренней энергии газа через значения давлений и объемов:

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{3}{2}\left(P_1\cdot\frac{4}{3}V_0 + (P_1+\Delta P)\cdot\frac{2}{3}V_0\right) - \frac{3}{2}\left(P_0\cdot\frac{3}{2}V_0 + (P_0+\Delta P)\cdot\frac{1}{2}V_0\right) = \\ &= \frac{3}{2}\left(P_1V_0 + \Delta P\cdot\frac{2}{3}V_0\right) - \frac{3}{2}\left(P_0V_0 + \Delta P\cdot\frac{1}{2}V_0\right) = \frac{3}{2}(P_1 - P_0)V_0 + \frac{1}{4}\Delta P V_0\end{aligned}. \tag{29}$$

Далее необходимо найти значения ΔP и P_1. Для этого воспользуемся равенством масс газов в обеих частях сосудов. Для начального состояния можно записать

$$\frac{3}{2}P_0V_0 = \frac{1}{2}(P_0 + \Delta P)V_0. \tag{30}$$

Отсюда следует

$$\Delta P = 2P_0 \tag{31}$$

Для конечного:

$$\frac{4}{3}P_1V_0 = \frac{2}{3}(P_1 + \Delta P)V_0, \tag{30}$$

что дает

$$P_1 = 2P_0. \tag{32}$$

Подставляя полученные значения в формулу (29), получим

$$\Delta U = \frac{3}{2}(P_1 - P_0)V_0 + \frac{1}{4}\Delta P V_0 = 2P_0V_0. \tag{33}$$

Теперь можно вычислить количество сообщенной газу теплоты

$$\boxed{Q = \Delta U + A = 2P_0V_0 + \frac{1}{6}\cdot 2P_0V_0 = \frac{7}{3}P_0V_0} \tag{34}$$