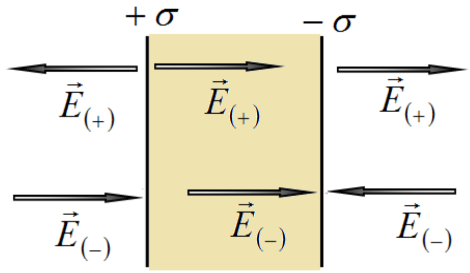
Задание 3. Поле в диэлектрике (Решение)

Часть 1. Нормальное поле



1.1 Бесконечная равномерно заряженная плоскость создает однородное поле, вектор напряженности которого направлен перпендикулярно плоскости. Плоский конденсатор состоит из двух больших параллельных пластин, заряды которых равны по модулю и противоположны по знаку. На рисунке показаны векторы напряженности полей, создаваемых положительно $\vec{E}_{(+)}$ и отрицательно $\vec{E}_{(-)}$ заряженными пластинами. Понятно, что модули этих векторов равны $\left|\vec{E}_{(+)}\right| = \left|\vec{E}_{(-)}\right| = E$ искомому значению напряженности поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью. Тогда модуль напряженности поля внутри конденсатора равен $2E$, а вне конденсатора поле отсутствует.

По определению емкость конденсатора равна отношению заряда одной из обкладок $Q = \sigma S$ к разности потенциалов между обкладками $\Delta\varphi = E_\Sigma d = 2Ed$:

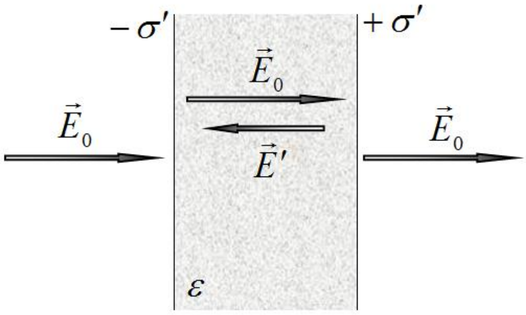
$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\sigma S}{2Ed}. \qquad (1)$$

Приравнивая это выражение к выражению для емкости конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$,

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\sigma S}{2Ed}, \qquad (2)$$

получаем требуемую формулу для напряженности поля, создаваемого одной пластиной:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (3)}$$



1.2 Электрическое поле внутри пластины является суперпозицией внешнего поля $\vec{E}_0$ и поля, созданного индуцированными зарядами $E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \qquad (4)$$

С другой стороны модуль напряженности этого поля в ε раз меньше напряженности внешнего поля:

$$\frac{E_0}{\varepsilon} = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что поверхностная плотность индуцированных зарядов равна

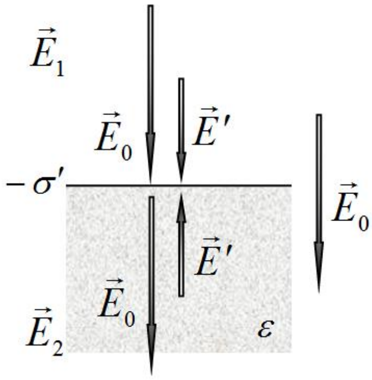
$$\boxed{\sigma' = \varepsilon_0 E_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\varepsilon_0 E_0. \qquad (6)}$$

Эту же величину можно выразить через напряженность поля внутри пластины

$$\boxed{\sigma' = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E. \qquad (7)}$$

1.3 В рассматриваемой здесь ситуации индуцированные заряды создают электрическое поле как внутри диэлектрика, так и над ним. Поэтому напряженности полей вне диэлектрика и внутри него можно представить в виде

$$E_1 = E_0 + E' = E_0 + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}, \qquad E_2 = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \qquad (7)$$



где $\vec{E}_0$ - напряженность внешнего поля, создаваемого всеми остальными зарядами, кроме зарядов на границе диэлектрика.
Из этих формул не сложно найти:

$$E_0 = E_1 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}, \qquad E_2 = E_0 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} = \left(E_1 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}\right) - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} = E_1 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \qquad (8)$$

Так как силовые линии электрического поля перпендикулярны границе диэлектрика, то $E_1 = \varepsilon E_2$. С учетом этого соотношения, из формулы (8) следует, что плотность индуцированных зарядов равна

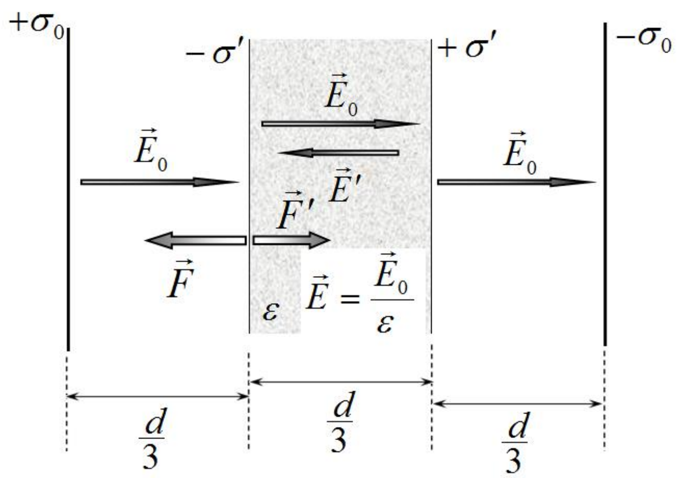
$$\boxed{\sigma' = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E_2. \qquad (9)}$$

1.4 Электрические заряды на обкладках конденсатора $\pm\sigma_0$ создают в пространстве между обкладками и диэлектрической пластиной электрическое поле напряженности

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}. \qquad (10)$$

Напряженность поля внутри диэлектрика равна

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (11)$$



1.4.1 Из формулы (7) следует, что поверхностные плотности зарядов на поверхности пластины равны

$$\boxed{\sigma_1' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma_0; \quad \sigma_2' = +\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma_0. \qquad (12)}$$

1.4.2 Для расчета емкости конденсатора воспользуемся определением. Заряд одной из обкладок равен $Q = \sigma_0 S$. Разность потенциалов рассчитаем, как работу сил электрического поля над единичным зарядом:

$$\Delta\varphi = E_0\frac{d}{3} + E\frac{d}{3} + E_0\frac{d}{3} = E_0\frac{2d}{3} + \frac{E_0}{\varepsilon}\frac{d}{3} = \frac{E_0 d}{3}\frac{2\varepsilon+1}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0 d}{3\varepsilon_0}\frac{2\varepsilon+1}{\varepsilon}. \quad (13)$$

Следовательно, емкость конденсатора $C = \dfrac{Q}{\Delta\varphi}$ равна

$$\boxed{C_0 = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1}\frac{\varepsilon_0 S}{d}.} \quad (14)$$

Замечание. Эта формула может быть получена из формулы для емкости последовательно соединенных конденсаторов.

1.4.3 Сила, действующая на заряженное тело, равна произведению заряда тела на напряженность электрического поля, созданного всеми внешними зарядами

$$F = qE. \quad (15)$$

Выделим на поверхности диэлектрической пластины небольшой участок площади ΔS
Тогда давление электрического поля на этот участок рассчитывается по формуле

$$P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\sigma'\Delta S E}{\Delta S} = \sigma' E_\Sigma. \quad (16)$$

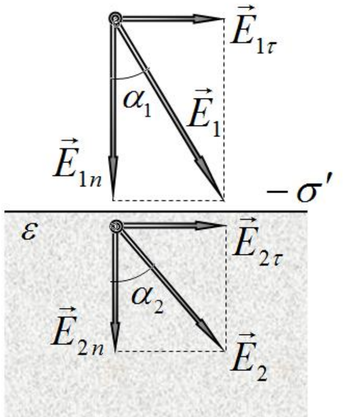
Здесь E_Σ - сумма напряженностей полей: создаваемого зарядами на обкладках конденсатора $E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$; и поля создаваемого индуцированными зарядами на второй поверхности диэлектрика $E' = \dfrac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$. С учетом направления сил, получим

$$P = \sigma'\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}\right). \quad (17)$$

Подставляя значение величины $\sigma' = \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\sigma_0$, после простых алгебраических преобразований, окончательно получаем

$$\boxed{P = \frac{\varepsilon^2-1}{2\varepsilon^2}\frac{\sigma_0^2}{\varepsilon_0}.} \quad (18)$$

Часть 2. Наклонное поле



2.1.1 Различие в полях вне диэлектрика $\vec{E}_1$ и внутри него $\vec{E}_2$ возникает из-за электрического поля $\vec{E}'$, созданного зарядами, индуцированными на поверхности диэлектрика. Разложим векторы напряженностей полей на составляющие параллельны границе и нормальные к ней (см. рис.). Вследствие принципа суперпозиции для электрического поля преобразования этих компонент при переходе через границу можно рассматривать независимо друг от друга.

Так как вектор напряженности поля индуцированных зарядов $\vec{E}'$ направлен перпендикулярно границе диэлектрика, тангенциальные составляющие векторов равны между собой

$$\vec{E}_{2\tau} = \vec{E}_{2\tau}\,. \tag{19}$$

Как было показано ранее, нормальные составляющие отличаются в ε раз:

$$\vec{E}_{2n} = \frac{\vec{E}_{1n}}{\varepsilon}\,. \tag{20}$$

Используя эти соотношения легко, получить «закон преломления» для линий напряженности

$$tg\,\alpha_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} = \frac{E_{1\tau}}{\frac{1}{\varepsilon}E_{1n}} = \varepsilon\, tg\,\alpha_1 \tag{21}$$

Или

$$\boxed{\frac{tg\,\alpha_2}{tg\,\alpha_1} = \varepsilon} \tag{22}$$

2.1.2 Для модуля напряженности поля внутри диэлектрика имеем

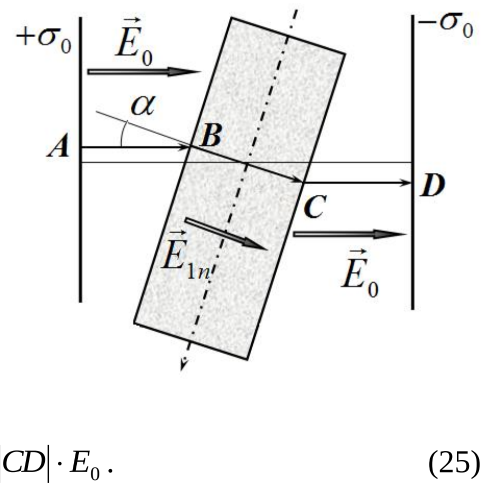
$$\begin{gathered}E_2 = \sqrt{E_{2\tau}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{E_{1\tau}^2 + \frac{E_{1n}^2}{\varepsilon^2}} = \sqrt{E_1^2\cos^2\alpha_1 + \frac{E_1^2}{\varepsilon^2}\sin^2\alpha_1} = \\ = \frac{E_1}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1} = \frac{E_1}{\varepsilon}\sqrt{1+\left(\varepsilon^2-1\right)\cos^2\alpha_1}\end{gathered}. \tag{23}$$

Откуда следует, что отношение модулей равно

$$\boxed{\frac{E_2}{E_1} = \frac{\sqrt{1+\left(\varepsilon^2-1\right)\cos^2\alpha_1}}{\varepsilon}\,.} \tag{24}$$

Обратите внимание, что утверждение «диэлектрик уменьшает поле в ε раз» в общем случае не верно. В рассмотренном примере; во-первых, изменяется направление вектора индукции, во-вторых, отношение модулей векторов зависит от «угла падения» и не равно ε.

2.2.1 При неизменных зарядах на обкладках конденсатора при повороте диэлектрической пластинки изменится разность потенциалов между обкладками. Для расчета этой разности потенциалов следует найти работу сил электростатического поля по перемещению единичного пробного заряда от одной обкладки до другой. Вследствие потенциальности поля, эта работа не зависит от траектории движения пробного заряда. Достаточно просто вычислить эту работу для траектории $ABCD$, показанной на рисунке (отрезки AC и CD перпендикулярны обкладкам конденсатора, отрезок BC перпендикулярен граням пластинки):



$$\Delta\varphi = U = |AB|\cdot E_0 + |BC|\cdot E_{1n} + |CD|\cdot E_0\,. \tag{25}$$

Из рисунка следует, что

$$|AB| = |CD| = \frac{d}{2} - \frac{d}{6}\cos\alpha\,. \tag{26}$$

Как было показано ранее

$$E_{1n} = \frac{E_{0n}}{\varepsilon} = \frac{E_0 \cos\alpha}{\varepsilon}. \qquad (27)$$

Поэтому разность потенциалов между обкладками конденсатора равна

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = U = |AB| \cdot E_0 + |BC| \cdot E_{1n} + |CD| \cdot E_0 = 2\left(\frac{d}{2} - \frac{d}{6}\cos\alpha\right)E_0 + \frac{d}{3} \cdot \frac{E_0 \cos\alpha}{\varepsilon} = \\ = E_0\left(d - \frac{d}{3}\cos\alpha\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right) = E_0 d\left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{3\varepsilon}\cos\alpha\right)\end{aligned}. \qquad (28)$$

Учитывая, что заряд на одной обкладке равен $Q = \varepsilon_0 S E_0$, получим выражение для емкости конденсатора

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0 S E_0}{E_0 d\left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{3\varepsilon}\cos\alpha\right)} = \frac{3\varepsilon}{(3\varepsilon - (\varepsilon - 1)\cos\alpha)}\frac{\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (29)}$$

2.2.2 При малых углах поворота следует воспользоваться приближенной формулой $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. В этом случае формула (29) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}C = \frac{3\varepsilon}{(3\varepsilon - (\varepsilon - 1)\cos\alpha)}\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{3\varepsilon}{\left(3\varepsilon - (\varepsilon - 1)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\right)}\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{3\varepsilon}{\left(2\varepsilon + 1 + (\varepsilon - 1)\frac{\alpha^2}{2}\right)}\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \\ = \frac{3\varepsilon}{(2\varepsilon + 1)}\frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1}\frac{\alpha^2}{2}} \approx C_0\left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1}\frac{\alpha^2}{2}\right)\end{aligned} \qquad (30)$$

где использована приближенная формула $\frac{1}{1 + x} \approx 1 - x$.

Окончательно получаем, что относительное изменение емкости конденсатора равно

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C_0} = -\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1}\frac{\alpha^2}{2}. \qquad (31)}$$