Задание 1. Гигантомания (Решение)

Задача 1.1 Падение камушка.

Расстояние между поверхностями сферического тела и радиус этого тела значительно меньше радиуса Земли, поэтому можно считать, что на тело действует постоянная сила гравитационного притяжения равная

$$F = mg\,. \tag{1}$$

Такая же по модулю сила действует и на Землю.

Рассмотрим случай а) плотность тела равна плотности Земли.
В этом случае масса тела значительно меньше массы Земли, поэтому смещением Земли можно пренебречь с высокой точностью. Таким образом, мы приходим к простейшей задаче: «тело падает с высоты h …»

1.1.1.а Время падения определяем из закона равноускоренного движения тела (падающего с ускорением свободного падения $a = g$):

$$\frac{g\tau_a^2}{2} = h\,. \tag{1}$$

Из которого находим

$$\boxed{\tau_a = \sqrt{2\frac{h}{g}} = 4{,}5\,c\,.} \tag{2}$$

1.1.2.а Скорость падения можно найти различными способами, например, из закона сохранения энергии:

$$\frac{mV^2}{2} = mgh\,. \tag{3}$$

Откуда следует:

$$\boxed{V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 100} \approx 45\frac{м}{c}\,.} \tag{4}$$

В случае б), когда масса тела равна массе Земли, необходимо учитывать движения Земли.

Задача существенно упрощается тем обстоятельством, что массы тел равны. При этом движение тела и Земли является «симметричным»: их центры движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю ускорениями и скоростями. Поэтому они столкнутся, когда каждое тело пролетит расстояние $\frac{h}{2}$. Так как силы, действующие на тела, определяются формулой (1), то ускорение каждого из тел по модулю равны g.

1.1.1.б Для расчета времени движения запишем соотношение

$$\frac{g\tau_б^2}{2} = \frac{h}{2}\,. \tag{1}$$

Из которого находим

$$\tau_б = \sqrt{\frac{h}{g}} = 3{,}2\,c\,. \qquad (2)$$

1.1.2.б Для расчета скорости каждого тела запишем кинематическое соотношение

$$\frac{h}{2} = \frac{V_1^2}{2g}\,. \qquad (3)$$

Которое приводит к следующему значению скорости тела в момент столкновения

$$V_1 = \sqrt{gh} \qquad (4)$$

Так тела движутся навстречу друг другу, то относительная скорость в момент столкновения в два раза превышает найденную скорость, т.е.

$$V = 2\sqrt{gh} = 63\,\frac{м}{c}\,. \qquad (5)$$

Задача 1.2 Космический корабль.

Отношение высоты полета корабля к радиусу Земли примерно равно 0,03. Так как численные расчеты следует проводить с двумя зачащими цифрами

1.2.1а Если масса корабля значительно меньше массы Земли, то Землю можно считать неподвижной. Тогда корабль движется по окружности, центр которой совпадает с центром Земли. На основании второго закона Ньютона можно записать уравнение движения корабля

$$m\frac{v^2}{R} = mg\,. \qquad (1)$$

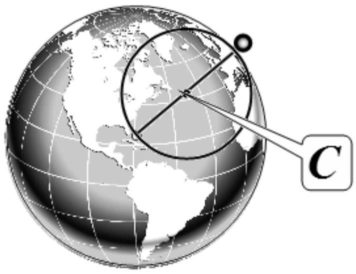
Скорость движения корабля является первой космической скоростью и равна

$$v = \sqrt{gR}\,. \qquad (2)$$

Следовательно, период обращения корабля равен

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 5{,}0\cdot 10^3 c \approx 84\,мин. \qquad (3)$$

1.2.1б Если масса корабля равна массе Земли, то центр Земли и корабль будут вальсировать вокруг общего центра масс. В рассматриваемом случае этот центр тяжести C находится на половине радиуса. Радиус окружности, по которой движутся корабль и центр Земли равен половине радиуса Земли



$$r = \frac{R}{2}\,. \qquad (4)$$

Поэтому уравнение движения корабля в этом случае будет иметь вид

$$m\frac{v^2}{R/2} = mg\,. \qquad (5)$$

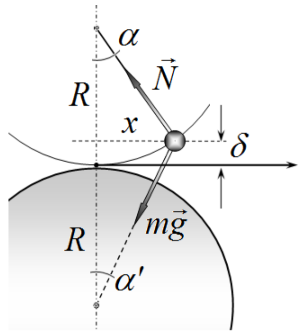
Скорость движения корабля

$$v = \sqrt{g\frac{R}{2}}\,. \qquad (6)$$

Наконец, период обращения равен

$$T = \frac{2\pi \frac{R}{2}}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}} = 3{,}6\cdot 10^3 c \approx 1 час. \qquad (7)$$

Задача 1.3 Эталон часа



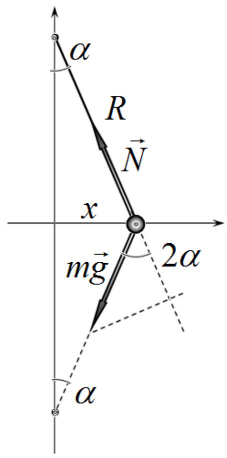
1.3 Рассмотрим траекторию движения маятника, которая является дугой окружности. Высота подъема маятника над поверхностью Земли равно

$$\delta = R - R\cos\alpha. \qquad (1)$$

При малых углах отклонения маятника эта величина является малой величиной второго порядка малости, поэтому ей можно пренебречь

$$\delta = R - R\cos\alpha \approx \frac{\alpha^2}{2}R \approx 0. \qquad (2)$$

В рамках этого подхода можно сделать следующие приближения:
- груз маятника движется по горизонтальной прямой;
- указанные на рисунке углы равны $\alpha' = \alpha$;
- модуль силы тяжести не изменяется в ходе движения и равен mg, эта сила направлена к центру Земли.



На следующем рисунке показаны силы, действующие на груз маятника. Проецируя силы на направление нити маятника, получим, что

$$N = mg\cos 2\alpha \approx mg. \qquad (3)$$

Здесь опять использовано приближение малых углов, когда с точностью до малых первого порядка $\cos 2\alpha \approx 1$.

Запишем теперь уравнение второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось x:

$$ma_x = -2mg\sin\alpha \approx -2mg\alpha. \qquad (4)$$

Наконец, выразим угол отклонения подвеса маятника через координату груза:

$$\alpha \approx \frac{x}{R}. \qquad (5)$$

Из формул (4)-(5) получаем уравнение

$$a_x = -2\frac{g}{R}x \qquad (6)$$

Это уравнение является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}} \approx 3{,}6\cdot 10^3 c \approx 1{,}0 час. \qquad (7)}$$