Задание 3. Таутохронизм и принцип Ферма (Решение)

Часть 1. Математическое введение.

1.1 Для доказательства формулы (1) условия задачи необходимо провести элементарные преобразования на приближенной формулой для степенной функции:

$$\sqrt{a^2+x^2}=a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\approx a\left(1+\frac{x^2}{2a^2}\right)=a+\frac{x^2}{2a}. \quad (1)$$

1.2 Уравнение окружности, описанной в условии, имеет вид

$$x^2+(y-R)^2=R^2. \quad (2)$$

Из этого уравнения выразим значение y, используя полученную формулу (1):

$$x^2+(y-R)^2=R^2 \quad \Rightarrow \quad y-R=\pm\sqrt{R^2-x^2} \quad \Rightarrow \quad y=R-\left(R-\frac{x^2}{2R}\right)=\frac{x^2}{2R}. \quad (3)$$

Из очевидных геометрических соображений выбран знак «минус» перед корнем.

Возможны и другие варианты вывода этой формулы. Например, раскрыть скобки в формуле (2), затем пренебречь величиной y^2*:*

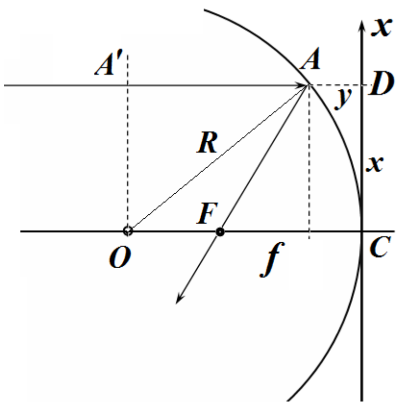
$$x^2+(y-R)^2=R^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-2yR+R^2=R^2 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{x^2}{2R} \quad (3a)$$

Отметим важное обстоятельство, которое будет использоваться в дальнейшем. Если считать малой величиной x, то величина y является малой величиной второго порядка малости. Поэтому, если использовать приближения первого порядка по y, то следует оставлять величины порядка x^2.

Часть 2. Таутохронизм

Задача 2.1

2.1 Точку фокуса можно рассматривать как изображение бесконечно удаленной точки. Согласно принципу таутохронизма для существования изображения необходимо показать, что существует точка F, время движения до которой одинаково для всех лучей. Из симметрии задачи следует, что эта точка находится на главной оптической оси.



Так как в данном случае свет распространяется в однородной среде, то условие постоянства времени движения равносильно условию равенства длин путей. Возьмем произвольный луч AA' параллельный главной оптической оси и проходящий на расстоянии $x=|CD|$ от нее. Так как падающие лучи параллельны, то расстояние от бесконечно удаленной точки до любой плоскости, перпендикулярной лучам (и главной оптической оси) одинаково для всех этих лучей. для простоты в качестве такой плоскости возьмем плоскость OA', проходящую через центр кривизны зеркала. Тогда условие таутохронизма может быть сформулировано следующим образом: должна существовать такая точка F, для которой расстояние $l = |AA'| + |AF|$ не зависит от величины x. Из рисунка следует, что это расстояние выражается через параметры системы следующим образом

$$l = (R - y) + \sqrt{x^2 + (f - y)^2} = R + f\ , \tag{4}$$

где $y = |AD|$; $f = |CF|$ - фокусное расстояние зеркала (если фокус существует). Величина $l = R + f$ расстояние от плоскости OA' до фокуса, для луча, распространяющегося вдоль оптической оси. Теперь, надо найти такую зависимость $y = f(x)$, чтобы равенство (4) выполнялось при любом x. Проводя элементарные алгебраические преобразования, получим:

$$\begin{gathered}(R - y) + \sqrt{x^2 + (f - y)^2} = R + f \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + (f - y)^2} = y + f \quad \Rightarrow \\ x^2 + f^2 - 2yf + y^2 = y^2 + 2yf + f^2 \quad \Rightarrow \quad 4yf = x^2\end{gathered} \tag{5}$$

Итак, если поверхность зеркала описывается функцией

$$y = \frac{x^2}{4f}, \tag{6}$$

то все лучи, параллельные оптической оси, придут в точку F одновременно, поэтому эта точка будет являться фокусом. Иными словами, если зеркало является параболическим, то существует фокус для всех лучей, независимо от расстояния от оптической оси.

Как было показано, в п.1.2, для лучей, идущих на малом расстоянии от оптической оси окружность может заменена параболой, поэтому справедливо и обратное утверждение – парабола может быть заменена дугой окружности. Сравнивая формулу (6) с формулой (3),

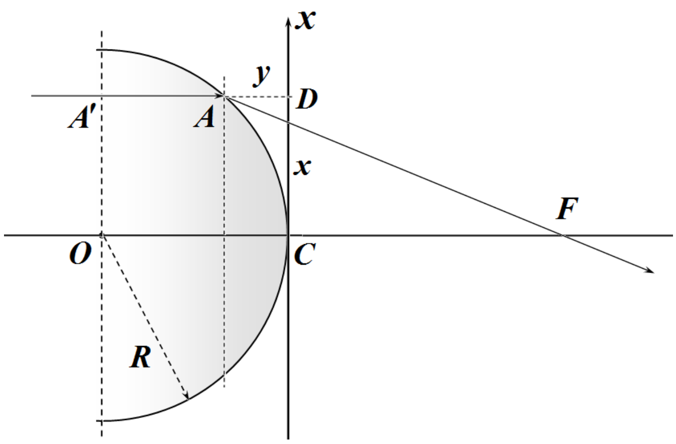
$$y = \frac{x^2}{4f} = \frac{x^2}{2R}, \tag{7}$$

получаем, что фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала равно

$$\boxed{f = \frac{R}{2}.} \tag{8}$$

Задача 2.2

2.2 Не повторяя всех рассуждений, проведенных при решении предыдущей задачи, сформулируем условие существования фокуса: ***время,*** за которой свет проходит расстояние $|A'A| + |AF|$, не зависит от расстояния x от луча до главной оптической оси.



Пусть свет проходит расстояние l в однородной среде с показателем преломления n, тогда время этого прохождения равно

$$t = \frac{l}{c/n} = \frac{nl}{c}. \tag{9}$$

где c/n - скорость света в этой среде.

Заметим, что вместо того, чтобы учитывать изменение скорости света (что происходит в действительности), при расчете времени прохождения можно считать, что скорость света остается постоянной (и равной скорости света в вакууме c) а увеличивается длина пути, которая становится равной nl (в оптике эту величину называют оптической длиной пути).

Таким образом, получаем, что условием существования фокуса является выполнение равенства при любых значениях x:

$$n(R-y)+\sqrt{x^2+(f+y)^2}=nR+f\,. \qquad (10)$$

Преобразуем данное равенство

$$\begin{gathered} n(R-y)+\sqrt{x^2+(f+y)^2}=nR+f \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x^2+(f+y)^2}=f+ny \quad\Rightarrow \\ x^2+f^2+2fy+y^2=f^2+2fny+n^2y^2 \quad\Rightarrow\quad x^2=2(n-1)fy \end{gathered} \qquad (11)$$

Если искривленная поверхность линзы описывается уравнением

$$y=\frac{x^2}{2(n-1)f}\,, \qquad (12)$$

то равенство (10) будет выполняться при любом значении x, т.е. точка F является фокусом. Но эта функция описывает в параксиальном приближении «дугу окружности» радиуса R:

$$y=\frac{x^2}{2R}\,. \qquad (13)$$

Следовательно, описанная в условии задачи линза обладает фокусом.

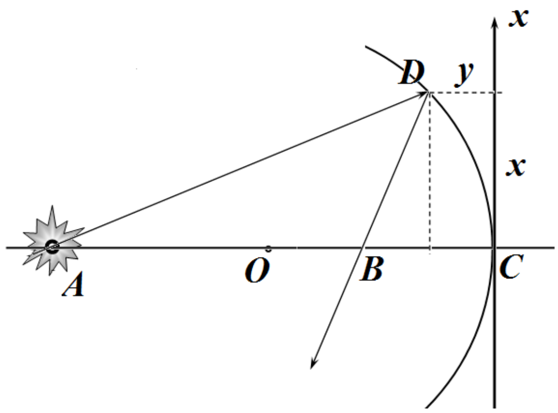
Для определения фокусного расстояния линзы достаточно приравнять выражения (12) и (13), откуда следует, что оно равно

$$\boxed{f=\frac{R}{n-1}\,.} \qquad (14)$$

Задача 2.3

2.3.1 По аналогии с предыдущими задачами: для существование изображения в точке B необходимо, чтобы расстояние $|AD|+|DB|$, не зависело от положения точки D на поверхности зеркала и равнялась расстоянию $|Ac|+|CB|$. Это условие будет выполнено, если равенство

$$\sqrt{x^2+(a-y)^2}+\sqrt{x^2+(b-y)^2}=a+b\,. \qquad (15)$$



выполняется при любых x. Возводить сумму корней в квадрат – неблагодарная задача, поэтому используем приближенные формулы для преобразования равенства (16). Сначала запишем:

$$\sqrt{x^2+(a-y)^2}+\sqrt{x^2+(b-y)^2}\approx\sqrt{x^2+a^2-2ay}+\sqrt{x^2+b^2-2by}\,. \qquad (16)$$

Здесь мы пренебреги слагаемыми y^2, но оставили величины x^2. Ранее мы показали, что для окружности (сферы и соприкасающейся параболы) величина y пропорциональна x^2, поэтому эти величины являются малыми одного порядка. Величина y^2 пропорциональна x^4, поэтому ей можно пренебречь. Используя соотношение между этими малыми величинами, продолжим алгебраические преобразования, используя формулу (1):

$$\sqrt{x^2+a^2-2ay}+\sqrt{x^2+b^2-2by}=\sqrt{a^2+\left(x^2-2ay\right)}+\sqrt{b^2+\left(x^2-2by\right)}\approx$$
$$\approx a+\frac{\left(x^2-2ay\right)}{2a}+b+\frac{\left(x^2-2by\right)}{2a}. \qquad (17)$$

Подставим это выражение в равенство (15):

$$a+\frac{\left(x^2-2ay\right)}{2a}+b+\frac{\left(x^2-2by\right)}{2b}=a+b. \qquad (18)$$

Откуда следует, что равенство (15) будет выполняться, при следующей зависимости $y(x)$:

$$y=\frac{x^2}{4a}+\frac{x^2}{4b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\frac{x^2}{4}. \qquad (19)$$

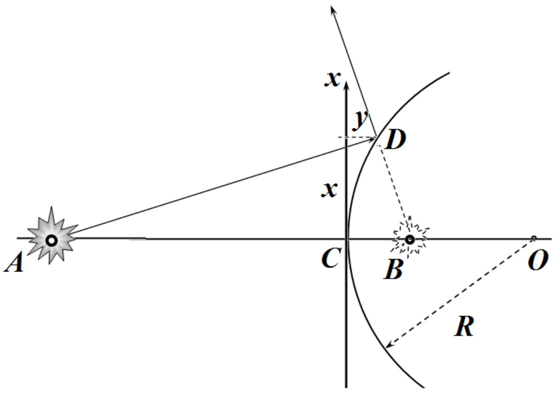
В очередной раз получено уравнение параболы, которая может рассматриваться, как параболу, соприкасающуюся с окружностью. В очередной раз, сравнивая выражение (19) с «параболическим уравнением» окружности $y=\frac{x^2}{2R}$, получаем, что существует такое значение b, при котором равенство (15) выполняется для всех лучей, исходящих из точки A. Т.е. изображение этой точки существует.

2.3.2 Из равенства (19) и уравнения «окружности» следует искомая формула зеркала

$$\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{R}=\frac{1}{f}.} \qquad (20)$$

Здесь использовано полученное ранее значение фокусного расстояния $f=\frac{R}{2}$.

Задача 2.4



2.4.1 Абсолютно очевидно, что в рассматриваемом случае лучи, вышедшие из точки A и отраженные от зеркала не будут вообще пересекаться. Но могут пересечься в одной точке продолжения отраженных лучей. Предположим, что для продолжений лучей расстояния надо считать ***отрицательными*** (?!)

2.4.2 В рамках этого предположение условие существования мнимого изображения формулируется следующим образом: величина $|AD|-|DB|$ одинакова для всех лучей, отраженных от зеркала, и равна $|AC|-|CB|=a-b$. Формально это условие записывается в виде равенства, аналогичного (15):

$$\sqrt{x^2+(a+y)^2}-\sqrt{x^2+(b-y)^2}=a-b. \qquad (20)$$

Аналогичные алгебраические выкладки, преобразую это равенство к следующему виду:

$$\sqrt{x^2+(a+y)^2}-\sqrt{x^2+(b-y)^2}\approx\sqrt{x^2+a^2+2ay}-\sqrt{x^2+b^2-2by}\approx$$
$$\approx\left(a+\frac{x^2+2ay}{2a}\right)-\left(b+\frac{x^2-2by}{2b}\right)=a-b\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2}{2a}-\frac{x^2}{2b}+2y=0 \qquad (21)$$

Используя «параболическое уравнение» окружности $y=\dfrac{x^2}{2R}$, получаем:

$$\boxed{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{2}{R}\ .} \qquad (22)$$

Эта формула совпадает с «формулой вогнутого зеркала», если:
а) считать расстояние до мнимого изображения отрицательным;
б) фокусное расстояние также отрицательно $F=-\dfrac{R}{2}$.

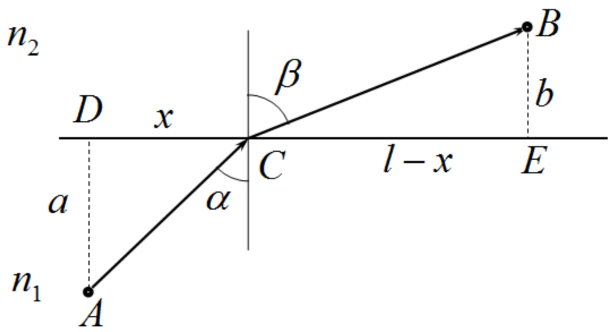
2.4.3 Геометрическая оптика является приближением волновой оптики. Поэтому принцип таутохронизма можно обосновать следующим образом:

- Каждому лучу можно поставить в соответствие некоторую волну.
- Если все эти волны проходят от источника до изображения за одно и тоже время, то фазы этих волн одинаковы;
- В результате интерференции в точке изображения реализуется максимум интенсивности.

Часть 3. Принцип Ферма

Задача 3.1

3.1 Пусть луч идет от точки A к точке B (см. рис.), преломляясь на границе раздела сред в некоторой точке C. Положение этой точки задается расстоянием x от точки D. Расстояние DE обозначим l, тогда расстояние CE равно $(l-x)$. Время движения света по пути ACB равно



$$\tau(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c/n_1}+\frac{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{c/n_2}=\frac{n_1\sqrt{a^2+x^2}+n_2\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{c}\ . \qquad (23)$$

По принципу Ферма при движении по истинной траектории это время минимально. Чтобы найти экстремум функции (23), необходимо вычислить производную и приравнять ее к нулю:

$$\tau'(x) = \left(n_1\sqrt{a^2 + x^2} + n_2\sqrt{b^2 + (l - x)^2}\right)' =$$
$$= \frac{2n_1 x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{2n_2(l - x)}{2\sqrt{b^2 + (l - x)^2}} = 0 \qquad (24)$$

Но, как следует из рисунка,

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin\alpha; \quad \frac{(l - x)}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}} = \sin\beta. \qquad (25)$$

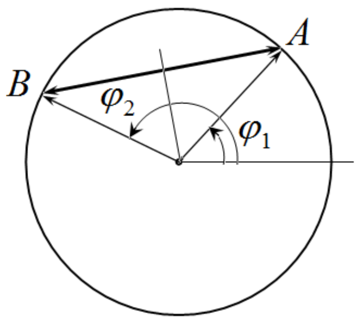
Поэтому из формул (24) – (25) следует закон преломления света:

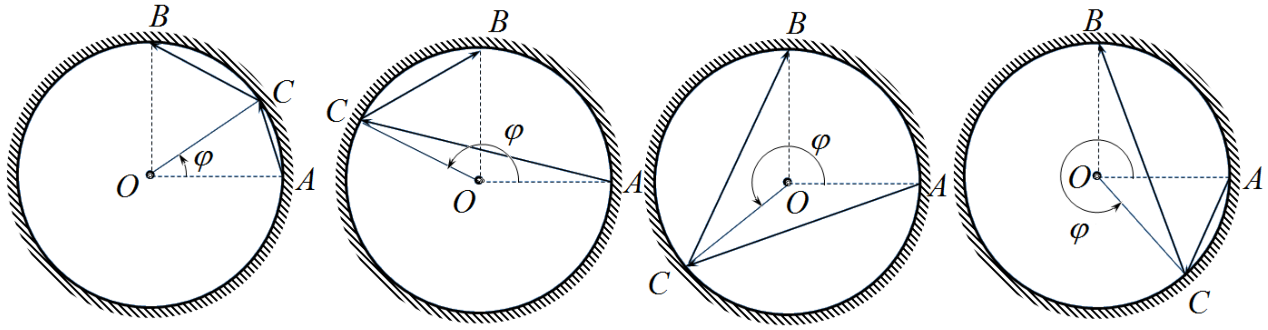
$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta. \qquad (26)$$

Задача 3.2

3.2.1 Для расчета длины траектории воспользуемся простой формулой для длины хорды $l = |AB|$, которую в общем виде можно записать следующим образом:

$$l = 2R\left|\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right|. \qquad (27)$$





Длина траектории луча с одним отражением от внутренней поверхности ACB равна сумме длин двух хорд, поэтому может быть описана формулой

$$L = 2R\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \left|\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right|\right) \qquad (28)$$

Перепишем эту формулу для двух интервалов значений угла φ.

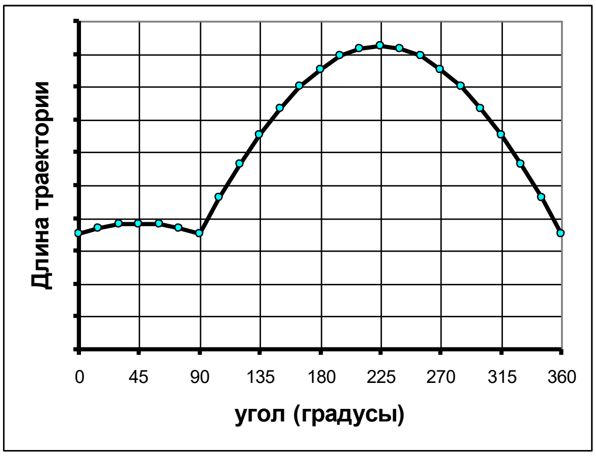
При $\varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$L = 2R\sin\frac{\varphi}{2} + 2R\sin\frac{\pi/2 - \varphi}{2} = 4R\sin\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{2}\right). \qquad (29)$$

При $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$

$$L = 2R\sin\frac{\varphi}{2} + 2R\sin\frac{\varphi - \pi/2}{2} = 4R\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right). \tag{30}$$

Схематический график этой зависимости показан на рисунке.



3.2.2 Истинные траектории луча, удовлетворяющие закону отражения света, реализуются при

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \end{cases}. \tag{31}$$

При этих значениях длины траекторий максимальны.

Задача 3.3 Выводы из проделанной работы.

3.3.1 Принцип Ферма неоходимо уточнить следующим образом:
свет выбирает из множества путей между двумя точками тот путь, который потребует экстремального (минимального или максимального) или стационарного (не зависящего от траектории) времени.
Математически это утверждение можно выразить таким образом. Пусть длина траектории описывается некоторой функцией от параметра ξ, определяющего траекторию, $L(\xi)$. Тогда истинным траекториям соответствуют значения параметров ξ^*, для которых производная обращается в нуль:

$$L'(\xi^*) = 0 \tag{32}$$

3.3.2 Обоснование принципа Ферма следует из волновых свойств света. Вблизи точки экстремума при изменении параметра от стационарного значения ξ^* на малую величину $\Delta\xi$ длина траектории изменяется на величину порядка $(\Delta\xi)^2$. Поэтому вблизи точки экстремума существует широкий диапазон траекторий, длины которых изменяются на очень малую величину. Волны, распространяющиеся вдоль этих траектория приходят в точку наблюдения с малой разностью фаз, поэтому для них выполняется условие максимума интерференции.