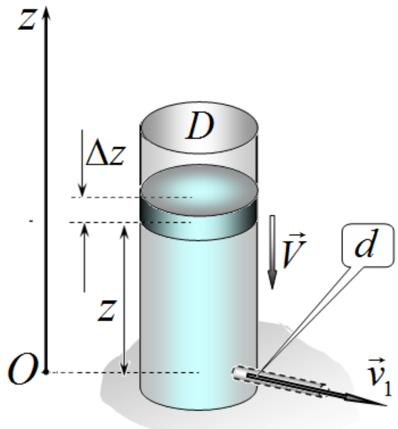
Часть 2. Дырявый сосуд



2.1 Рассмотрим процесс вытекания за малый промежуток времени Δt. Пусть за это время уровень воды в сосуде изменился от z до $z - \Delta z$. Поэтому потенциальная энергия воды в сосуде уменьшилась на величину

$$\Delta U = \Delta mgz \tag{15}$$

где Δm- масса воды, вытекшей из сосуда за рассматриваемый промежуток времени. Такая же масса воды протекла через отверстие, унося кинетическую энергию

$$\Delta E_k = \frac{\Delta m v_1^2}{2}. \tag{16}$$

Так как площадь поперечного сечения сосуда значительно больше диаметра отверстия, то кинетической энергией воды, находящейся в сосуде, можно пренебречь. На основании закона сохранения механической энергии можно записать

$$\frac{\Delta m v_1^2}{2} = \Delta mgz. \tag{17}$$

Откуда следует, что скорость вытекания воды из отверстия равна

$$\boxed{v_1 = \sqrt{2gz}\,.} \tag{18}$$

2.2 Изменение объема воды в сосуде равно объему вытекшей воды, поэтому

$$SV\Delta t = s_1 v_1 \Delta t\,, \tag{19}$$

где S, s_1 площади поперечного сечения сосуда и отверстия, соответственно.
Из формулы (19) следует, что

$$V = \frac{s_1}{S} v_1. \tag{20}$$

Учитывая, что отношение площадей равно квадрату отношения диаметров, используя формулу (18) получим зависимость скорости опускания от высоты

$$V(z) = \left(\frac{d}{D}\right)^2 v_1 = \eta^2 \sqrt{2gz}\,. \tag{21}$$

С учетом направления оси z, запишем искомую зависимость проекции этой скорости от высоты

$$\boxed{V_z(z) = -\sqrt{2\left(\eta^4 g\right) z}\,.} \tag{21}$$

2.3 Функция (21) полностью аналогична зависимости (6), полученной для равноускоренного движения шарика в поле тяжести земли, если заменить величину g на модифицированное значение $\eta^4 g$. Кроме того, для этих зависимостей одинаковы начальные условия (при $t = 0$ $z = h_0$), поэтому законы движения также полностью аналогичны! Следовательно, далее можно использовать все формулы, полученные для движения шарика (не забывая в них изменить значение ускорения).
Так ускорение уровня воды равно

$$\boxed{a_z = +\eta^4 g\,.} \tag{22}$$

2.4 С помощью найденной аналогии на основании формулы (9) запишем закон движение границы

$$z(t) = \frac{\left(V_0 - \eta^4 gt\right)^2}{2\eta^4 g}. \qquad (23)$$

Начальная скорость движения определяется формулой (21), поэтому закон движения уровня воды имеет вид

$$\boxed{z(t) = \frac{\left(\sqrt{2\eta^4 gh_0} - \eta^4 gt\right)^2}{2\eta^4 g}. \qquad (23)}$$

2.5 Время «полувытекания» найдем с помощью формулы (11) и найденным значением коэффициента (14)

$$\tau_{0,5} = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{h_0}{\eta^4 g}}. \qquad (24)$$

2.6 подстановка численных значений приводит к результату

$$\boxed{\tau_{0,5} = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{h_0}{\eta^4 g}} = \left(\sqrt{2} - 1\right)\cdot 20^2\sqrt{\frac{0,20}{10}} \approx 23c. \qquad (25)}$$