Задание 3. Теплокровный сферический кот (Решение)

Часть 1. Постоянное тепловыделение.

Основная идея расчета установившейся температуры – выполнение уравнения теплового баланса, когда мощность выделяющейся теплоты равна мощности теплоты. уходящей в окружающую среду

$$W = q\,. \tag{1}$$

В рассматриваемой в части 1 модели это уравнение имеет вид

$$wV = \beta S(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad w\frac{4}{3}\pi R^3 = \beta \cdot 4\pi R^2 (t - t_0). \tag{2}$$

Это уравнение перепишем в виде

$$t - t_0 = \frac{wR}{\beta}\,. \tag{3}$$

1.1 Из уравнения (3) следует, что разность между установившейся температурой и температурой окружающей среды пропорциональная радиусу тела. Следовательно, температура котенка будет меньше. Запишем уравнение (1) для кота и для котенка

$$\begin{aligned} t_1 - t_0 &= \frac{wR_0}{\beta} \\ t_2 - t_0 &= \frac{wR_0}{2\beta} \end{aligned}\,. \tag{4}$$

Из этих уравнений следует, что

$$\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = t_0 + \frac{t_1 - t_0}{2}\,. \tag{5}$$

Подстановка численных значений дает следующий результат:

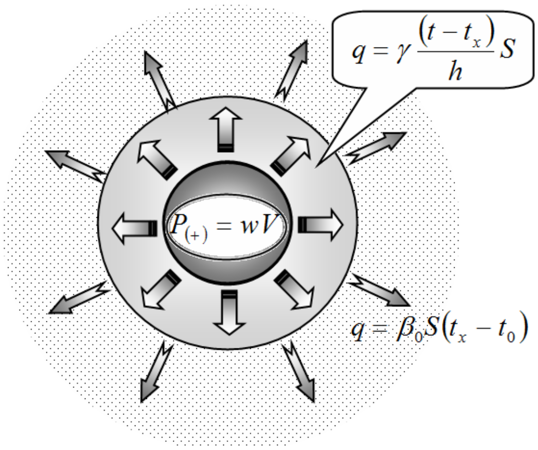
$$\boxed{t_1 = t_0 + \frac{t_1 - t_0}{2} = 28^\circ\,.} \tag{6}$$

1.2.1 Запишем уравнения баланса (3) для голого и для одетого котенка

$$\begin{aligned} t_2 - t_0 &= \frac{wR_0}{2\beta_0} \\ t_3 - t_0 &= \frac{wR_0}{2\frac{\beta_0}{2}} = \frac{wR_0}{\beta_0} \end{aligned}\,. \tag{7}$$

Из этих уравнений следует, что температура одетого котенка станет равной температуре голого кота

$$\boxed{t_3 = t_1 = 36^\circ} \tag{8}$$



1.2.2 В данном случае можно записать «двойного» уравнения баланса: мощность выделяющейся теплоты равна мощности теплоты, проходящей через слой одежды, и равна мощности теплоты уходящей в окружающую среду.

$$wV = \gamma \frac{t - t_x}{h} S = \beta(t_x - t_0)S. \qquad (9)$$

Здесь t_x - температура внешней поверхности одежды. Из второй части равенства (9) выразим значение t_x

$$\gamma \frac{t - t_x}{h} S = \beta(t_x - t_0)S \quad \Rightarrow \quad t_x = \frac{at + t_0}{a + 1}. \qquad (10)$$

где обозначено $a = \frac{\gamma}{h\beta_0}$. Теперь поток в окружающую среду можно представить в виде:

$$\beta_0(t_x - t_0)S = \beta\left(\frac{at + t_0}{a + 1} - t_0\right)S = \beta \frac{a}{a + 1} S(t - t_0) \qquad (11)$$

Таким образом, мощность потока теплоты от тела кота в окружающую среду пропорционален разности их температур. Полученное выражение формально совпадает с формулой (2), приведенной в условии задачи.

1.2.3 «Новый» коэффициент пропорциональности, как следует из формулы (11), равен

$$\boxed{\alpha_1 = \beta S \frac{a}{a + 1} = \alpha_0 \frac{\gamma}{\gamma + h\beta_0}. \qquad (12)}$$

Из этого выражения следует, что при увеличении толщины слоя одежды коэффициент теплопередачи уменьшается, поэтому согласно уравнению (3) температура тела увеличивается.

Отметим, что при больших значениях теплопроводности коэффициент теплопередачи остается неизменным и равным α_0. При малой теплопроводности коэффициент теплопередачи полностью определяется теплопроводностью одежды: $\alpha_1 \approx \frac{\gamma}{h} S$.

Часть 2. «Живая» модель

Основной идеей решения этой части также является уравнение теплового баланса, которое в данной модели имеет вид

$$A(t - t_{\min})(t_{\max} - t) = \alpha_0(t - t_0), \qquad (13)$$

которое является квадратным уравнением, поэтому при известных коэффициентах может быть решено аналитически.

2.1 Как оговорено в условии. при оптимальной температуре мощность тепловыделения максимальна. Зависимость $W(t) = A(t - t_{\min})(t_{\max} - t)$ является квадратичной. Значения нулей этой функции очевидны: это $t_{\min}$ и $t_{\max}$. как известно, вершина параболы находится на середине отрезка между корнями. Следовательно, оптимальная температура кота равна

$$t_{opt} = \frac{1}{2}\left(t_{\min} + t_{\max}\right) = 40°. \tag{14}$$

2.2 В уравнении теплового баланса (13) входят две неизвестных константы – коэффициенты пропорциональности A и α_0. Но это уравнение можно переписать следующим образом

$$\overline{A}\left(t - t_{\min}\right)\left(t_{\max} - t\right) = \left(t - t_0\right) \tag{15}$$

В этом уравнении одна неизвестная постоянная величина $\overline{A} = \dfrac{A}{\alpha_0}$, которая может быть найдена из заданного значения $t_0^* = 20°$. Поэтому коэффициента теплоотдачи и служит нормировочной постоянной. Поэтому

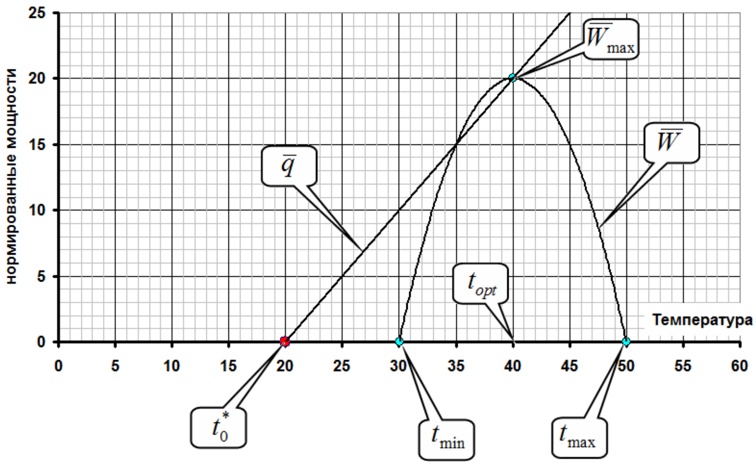
$$C = \alpha_0; \quad \overline{W} = \overline{A}\left(t - t_{\min}\right)\left(t_{\max} - t\right); \quad \overline{q} = t - t_0. \tag{16}$$

Нормировочная постоянная C (она же α_0) равна мощности теплоты, уходящей в окружающую среду, пир разности температур поверхности и воздуха равной $1°$. Отметим, что нормированные мощности измеряются в градусах Цельсия!
В нормированных функциях мощностей имеется только один параметр $\overline{A}$, который рассчитывается по дополнительному условию: при $t_0^* = 20°$ температура кота оптимальна t_{opt}. Тогда из уравнения (15) находим:

$$\overline{A} = \frac{t_{opt} - t_0^*}{\left(t_{opt} - t_{\min}\right)\left(t_{\max} - t_{opt}\right)} = 0{,}20\frac{1}{°C}. \tag{17}$$

2.3 Построение начнем с примитивного графика функции $\overline{q}(t) = t - t_0$. График – прямая линия с коэффициентом наклона равным единице, и пересекающая ось температур в точке t_0.

График функции $\overline{W}(t) = \overline{A}\left(t - t_{\min}\right)\left(t_{\max} - t\right)$; является параболой, ветви которой направлены вниз. Нули и положение вершины этой функции были «найдены» ранее. Максимальное значение функции $\overline{W}(t)$ можно рассчитать, подставив значение $t = t_{opt}$: $\overline{W}(t) = \overline{A}\left(t_{opt} - t_{\min}\right)\left(t_{\max} - t_{opt}\right) = 20°$.



Заметим, что это значение можно определить и по функции $\overline{q}(t)$. Эта прямая проходит через вершину параболы. Точка пересечения прямой с осью температур отстоит от температуры вершины параболы на $20°$. Так как наклон прямой равен 1, то значение мощности в точке пересечения с параболой тоже равно $20°$.

Так как авторы заданий любезно разрешили проводить промежуточные расчеты, то запишем уравнение теплового баланса «в числах».

$$\overline{A}(t-t_{\min})(t_{\max}-t)=(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5}(t-30)(50-t)=t-t_0$$

Здесь мы записали значение $\overline{A}=0{,}20=\dfrac{1}{5}$. После приведения подобных членов, получим

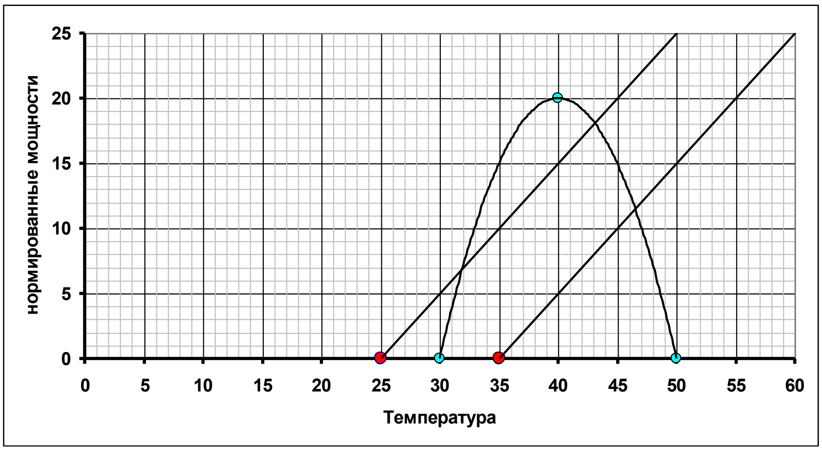
$$t^2-75t+(150-5t_0)=0 \qquad (18)$$

2.4 Для расчета установившейся температуры, надо решить квадратное уравнение (18) при нужном значении температуры воздуха. Так при $t_0=35°$ это уравнение имеет два корня

$t_{(1)}=28{,}5°$

$t_{(2)}=46{,}5°$

Первый корень надо отбросить, так как он выходит за пределы диапазона жизнедеятельности.



При $t_0=25°$ корнями уравнения (18) являются

$t_{(1)}=32°$

$t_{(2)}=43°$.

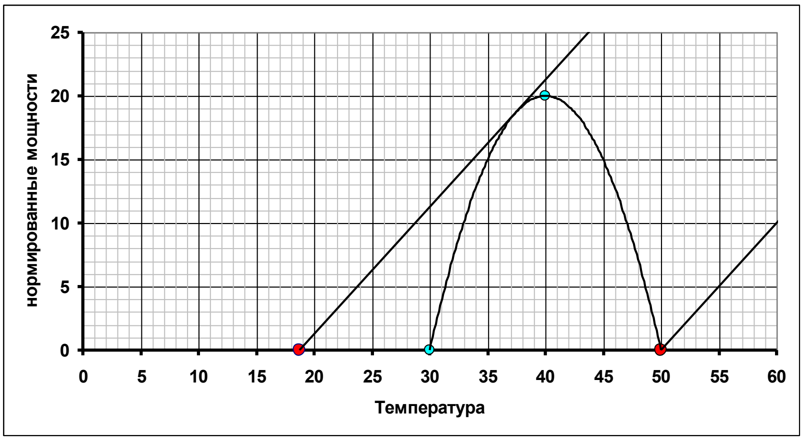
Чтобы понять смысл двух корней дадим графическую иллюстрацию этих решений. На графике «видны» корни уравнения как точки пересечения прямых с параболой. Но эти корни являются точками равновесия, которое может быть, как устойчивым, так и неустойчивым! Легко показать, что только больший корень $t_{(2)}$ (на ниспадающей ветви параболы) является устойчивым. Действительно, при температуре большей $t_{(2)}$ мощность потерь превысит мощность тепловыделения, поэтому кот начнет остывать. Если температура станет меньше значения $t_{(2)}$ ситуация обратная: мощность тепловыделения превышает мощность потерь, поэтому температура будет повышаться. Аналогичные рассуждения приводят к выводы, что меньший корень неустойчив, поэтому это значение температуры реализовываться не будет.

Таким образом, установившиеся температуры равны:

при $t_0=35°$: $t=46{,}5°$.

при $t_0=25°$: $t=43°$. (19)

2.5 Чтобы найти допустимый диапазон температур воздуха, мысленно построим на графике мощностей тепловыделения и теплопотерь несколько прямых графиков $\overline{q}(t)$ при различных значениях температуры воздуха t_0. Кот сможет жить при температуре воздуха t_0, если соответствующая прямая пересекается с параболой $\overline{W}(t)$. На рисунке показаны «крайние»



прямые. Не сложно заметить, что максимальная температура воздуха равна

$$t_{0\max} = t_{\max} = 50° . \qquad (20)$$

Минимальной температуре воздуха соответствует прямая, которая является касательной к параболе. Теперь заметим, что в этом случае уравнение баланса (18) имеет единственный корень, при этом дискриминант уравнения обращается в нуль! Записываем значения дискриминанта и приравниваем его к нулю

$$D = \left(\frac{75}{2}\right)^2 - (1500 - 5t_0) = 0 \qquad (21)$$

Из этого условия находим минимальную температуру воздуха, при которой кот выживает:

$$t_{0\min} \approx 19° . \qquad (22)$$

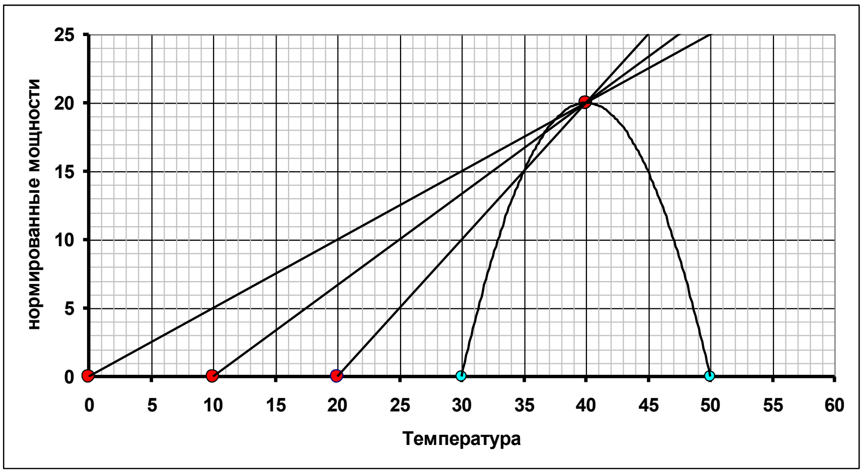
2.6 Уравнение теплового баланса с изменяющимся коэффициентом теплоотдачи в нормированном виде имеет вид

$$\overline{A}(t - t_{\min})(t_{\max} - t) = \frac{\alpha}{\alpha_0}(t - t_0). \qquad (23)$$

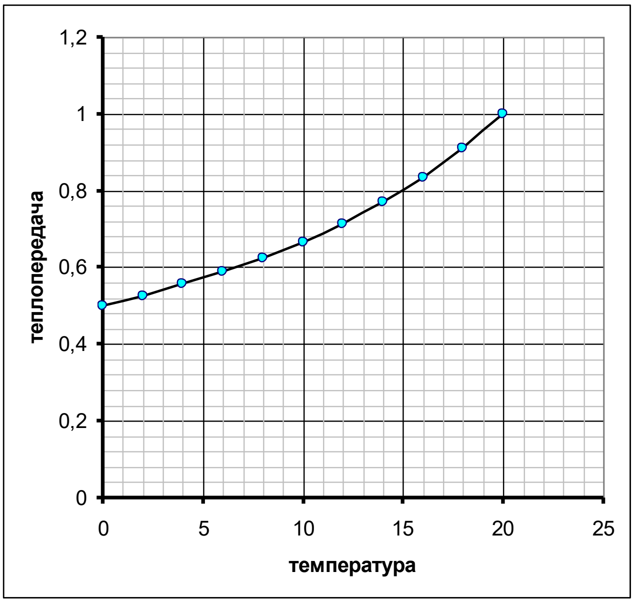
Необходимо, чтобы при любом значении t_0 один из корней этого уравнения был равен $t_{opt} = 40°$. Вспомним, что при этой температуре, мощность тепловыделения максимальна ($W_{\max} = 20°$). Таким образом, из уравнения (23) получаем, что необходимая зависимость имеет вид

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\overline{W}_{\max}}{t_{opt} - t_0} = \frac{20}{40 - t_0} . \qquad (24)$$

Изменение коэффициента теплопередачи приводит к изменению наклона прямой, являющейся графиком зависимости $\overline{q}(t)$. Все эти прямые должна проходить через вершину параболы и пересекать ось температур в точке t_0 (см. рисунок)



2.7 График зависимости $\frac{\alpha(t_0)}{\alpha_0}$ показан на рисунке. Понятно, что при понижении температуры теплоотдачу (следовательно, и коэффициент теплопередачи) надо уменьшать.



2.8 Для строго определения нужного коэффициента надо построить касательную к параболе, проходящую через начало координат. однако для оценки можно принять, что прямая отдачи проходит через вершину параболы. В этом случае, искомое значение можно найти по формуле (24) при $t_0 = 0°$.

Поэтому

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 0{,}5 \qquad (25)$$

т.е. коэффициент теплоотдачи надо уменьшить в **два** раза.