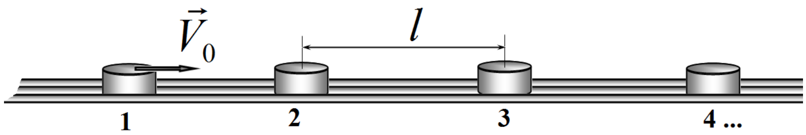
Задание 1. Три цепочки.

Задача 1.1



Обозначим скорость шарика номер k сразу после его столкновения - v_k. Из закона сохранения импульса

$$mV_0 = kmv_k\,, \tag{1}$$

Следует, что она равна

$$v_k = \frac{V_0}{k}. \tag{2}$$

Поэтому время движения k «слипшихся» шайб до очередного столкновения равно

$$\tau_k = \frac{l}{v_k} = k\frac{l}{V_0}. \tag{3}$$

Последняя шайба сдвинется через время T, которой равно сумме времен

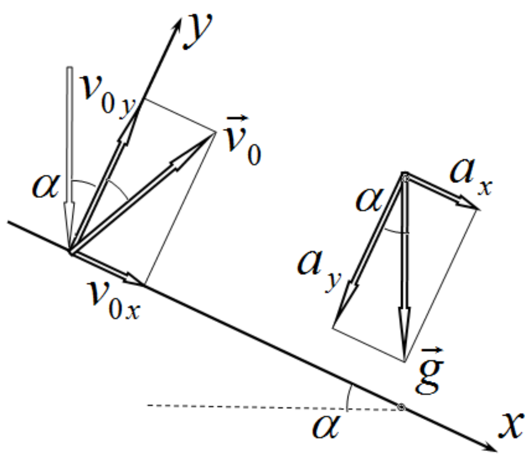
$$T = \sum_{k=1}^{N-1}\tau_k = \frac{l}{V_0}\sum_{k=1}^{N-1}k\,. \tag{4}$$

Используя формулу для суммы членов арифметической прогрессии, получаем нужный результат

$$\boxed{T = \frac{N(N-1)}{2}\frac{l}{V_0}.} \tag{5}$$

Задача 1.2

Движение шарика в данной задаче удобно рассматривать в системе координат, связанной с наклонной плоскостью. Направим ось x вдоль наклонной плоскости, а ось y перпендикулярно к ней. Начало отсчета совместим с точкой первого удара. В этой системе проекции ускорения на оси координат равны



$$\begin{cases} a_x = g\sin\alpha \\ a_y = -g\cos\alpha \end{cases}. \tag{1}$$

А проекции начальной скорости после первого удара (с учетом абсолютной упругости) описываются формулами

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0\sin\alpha \\ v_{0y} = v_0\cos\alpha \end{cases}. \tag{2}$$

где

$$v_0 = \sqrt{2gh} \tag{3}$$

модуль скорости шарика после первого удара.

Так как в моменты ударов силы направлены перпендикулярно плоскости, то проекция скорости на ось x изменяться во время ударов изменяться не будет. Следовательно, движение в проекции на ось x будет равноускоренным:

$$x = v_0 t\sin\alpha + \frac{g\sin\alpha}{2}t^2\ . \tag{4}$$

Запишем закон движения шарика вдоль оси y после первого столкновения:

$$y = v_0 t\cos\alpha - \frac{g\cos\alpha}{2}t^2 \ . \qquad (5)$$

Из этого выражения следует, что второй удар произойдет через время τ, равное

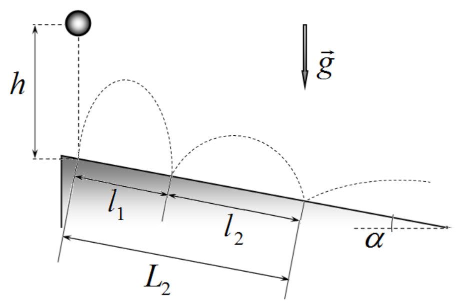
$$v_0\tau\cos\alpha - \frac{g\cos\alpha}{2}\tau^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2v_0}{g} \ . \qquad (6)$$

Проекция скорости v_y в этот момент времени будет равна

$$v_{y1} = v_0\cos\alpha - g\cos\alpha\,\tau = v_0\cos\alpha - g\cos\alpha\frac{2v_0}{g} = -v_0\cos\alpha \ . \qquad (7)$$

Таким образом, после второго отскока проекция скорости v_y останется такой же, как и после первого отскока, следовательно, после каждого столкновения эта проекция остается неизменной. Отсюда следует важный вывод – время между последовательными ударами постоянно и определяется формулой (5)!

Поэтому проще сначала найти ответ на второй вопрос задачи, а затем на первый.



1.2.2 Время k пролетов равно

$$t_k = k\tau = k\frac{2v_0}{g} \ . \qquad (8)$$

Координата x (равная искомой величине L_k) задается законом движения (4):

$$L_k = v_0(k\tau)\sin\alpha + \frac{g\sin\alpha}{2}(k\tau)^2 = k(k+1)\frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha \ . \qquad (9)$$

С учетом формулы для начальной скорости (3), получаем

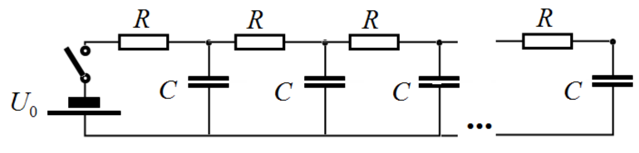
$$\boxed{L_k = 4k(k+1)h\sin\alpha} \qquad (10)$$

1.2.1 Расстояния между последовательными ударами рассчитываются по формуле

$$\boxed{l_k = L_k - L_{k-1} = 8kh\sin\alpha \ .} \qquad (11)$$

Задача 1.3

1.3.1 Если конденсатор не заряжен, то напряжение на нем равно нулю, поэтому он является проводником. Следовательно, в момент замыкания цепи ток пойдет только через первый резистор, поэтому его сила равна



$$\boxed{I_0 = \frac{U}{R}} \qquad (1)$$

1.3.2 Когда конденсаторы зарядятся, ток в цепи прекратится. В этом случае напряжения на резисторах станут равными нулю (т.е. их можно считать проводниками). В этом случае напряжение на всех конденсаторах станет равным напряжению источника.

Поэтому суммарный заряд цепи станет равным

$$\boxed{q = N\frac{U}{C} \ .} \qquad (2)$$