Задание 2. Столкновение ядер (Решение)

Часть 1. Порог реакции

1.1 Основная проблема рассмотренного типа ускорения заключается в том, что ядро-мишень также приходит в движение. Поэтому не все кинетическая энергия движущегося ядра переходит в энергию их взаимодействия. При сближении положительно заряженных ядер возрастает энергия их кулоновского взаимодействия, которое препятствует их столкновению. Не сложно понять, что при минимальном сближении ядер их скорости становятся равными. Запишем закон сохранения энергии для рассматриваемых ядер

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} + W(r). \tag{1}$$

Здесь: V_0 - скорость ускоренного ядра; V скорости ядер в момент максимального сближения; $W(r)$ - потенциальная энергия кулоновского взаимодействия в этот же момент времени.

Так как ядра должны сблизиться на расстояние $(r_1 + r_2)$, потенциальная энергия взаимодействия должна достичь величины

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 (r_1 + r_2)}, \tag{2}$$

где q_1, q_2 - электрические заряды ядер. Скорость ядер в момент максимального сближения можно выразить их закона сохранения импульса

$$m_1 V_0 = (m_1 + m_2)V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_0 \tag{3}$$

Подставим в уравнение (1) и преобразуем его:

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)}{2}\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} V_0\right)^2 + W(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1 V_0^2}{2}\frac{m_2}{m_1 + m_2} = W(r). \tag{4}$$

Кинетическую энергию налетающего ядра выразим через ускоряющую разность потенциалов U:

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} = q_1 U. \tag{5}$$

Эти уравнения позволяют записать выражение

$$q_1 U \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 (r_1 + r_2)}, \tag{6}$$

Из которого находим

$$U = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 (r_1 + r_2)}. \tag{7}$$

Наконец выразим характеристики ядер через их массовые и зарядовые числа

$$U = \frac{A_1 + A_2}{\left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}\right)}\frac{Z_2}{A_2}\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}. \tag{8}$$

Подставляя численные значения всех величин, получим

$$\boxed{U = \frac{A_1 + A_2}{\left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}\right)}\frac{Z_2}{A_2}\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{12 + 207}{\left(12^{1/3} + 207^{1/3}\right)}\frac{82}{207}\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}3\cdot 10^{-15}} = 1{,}2\cdot 10^{7}\,В} \tag{9}$$

1.2 Для вычисления скорости налетающего ядра воспользуемся формулами (5) и (8):

$$\frac{A_1 m_p V_0^2}{2} = Z_1 eU = Z_1 e \frac{A_1 + A_2}{\left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}\right)} \frac{Z_2}{A_2} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a} \quad \Rightarrow$$
$$V_0 = \sqrt{\frac{A_1 + A_2}{\left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}\right)} \frac{Z_2 Z_1}{A_2 A_1} \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a m_p}} \quad . \qquad (10)$$

Численное значение этой величины равно

$$\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{A_1 + A_2}{\left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}\right)} \frac{Z_2 Z_1}{A_2 A_1} \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a m_p}} = 3{,}35 \cdot 10^7 \frac{м}{с} \quad . \qquad (11)}$$

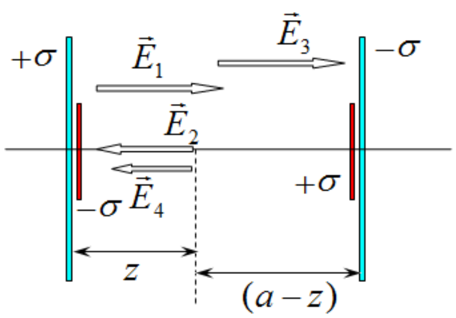
1.3 Если ядра пометь местами, то это приведет к изменению индексов в конечных формулах. Тогда ускоряющая разность потенциалов для атома свинца оказывается равной

$$\boxed{U = \frac{A_1 + A_2}{\left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}\right)} \frac{Z_1}{A_1} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a} = 1{,}5 \cdot 10^7\, В \quad . \qquad (12)}$$

Формула для скорости симметрична по индексам, поэтому скорость ядра свинца должна остаться прежней

$$\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{A_1 + A_2}{\left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}\right)} \frac{Z_2 Z_1}{A_2 A_1} \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a m_p}} = 3{,}35 \cdot 10^7 \frac{м}{с} \quad . \qquad (13)}$$

Часть 2. Ускоряющая система



2.1 Для расчета энергии, которую получает ядро при пролете через ускоряющую ячейку, необходимо рассмотреть электрическое поле между пластинами.

Для расчета поля используем принцип суперпозиции и достаточно традиционную идею: вместо отверстия будем рассматривать сплошную пластину с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$, на которую наложен диск, радиус которого равен радиусу отверстия, с противоположной плотностью заряда $-\sigma$. Аналогично будем рассматривать и вторую пластину с отверстием.

При таком подходе напряженность электрического поля на оси отверстий можно представить в виде следующей суммы полей (в проекции на направление движения частиц):

- поле положительно заряженной пластины $E_1 = E_0$;
- «поле отверстия» в этой пластине $E_2 = -E_0\left(1 - \frac{z}{R}\right)$;
- поле отрицательно заряженной пластины $E_3 = E_0$;

- «поле отверстия» во второй пластине $E_4 = -E_0\left(1-\frac{a-z}{R}\right)$.

Сумма этих полей оказывается равной

$$E_\Sigma = E_0\frac{a}{R}. \qquad (14)$$

Таким образом, в рамках приближенной модели поля диска, поле на оси отверстий оказывается однородным. Следовательно, разность потенциалов между центрами отверстий равна

$$\Delta\varphi_{CC} = E_\Sigma a = E_0\frac{a^2}{R}. \qquad (15)$$

При прохождении этой разности потенциалов энергия ядра увеличится на величину

$$\Delta W = q\Delta\varphi_{CC} = qE_0\frac{a^2}{R}. \qquad (16)$$

На большом удалении от отверстий поле между пластинами однородное, его напряженность равна E_0. Следовательно, разность потенциалов (или напряжение) между пластинами равна

$$U_0 = aE_0. \qquad (17)$$

Наконец, из последних формул следует, что при пролете через ускоряющую систему ядро приобретет энергию равную

$$\boxed{\Delta W = qU_0\frac{a}{R}.} \qquad (18)$$

2.2 Формула для емкости плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad (19)$$

И определение емкости

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{2E_0 d}, \qquad (20)$$

(здесь E_0 - напряженность поля, создаваемого одной платиной) позволяют выразить напряженность поля одной пластины через поверхностную плотность заряда на ней

$$\boxed{E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.} \qquad (21)$$

Часть 3. Линейный ускоритель

3.1 Чтобы разгон ядра проходил в каждой ускоряющей ячейке, необходимо, чтобы ядро подлетало к очередной ячейке в момент включения поля. То есть времена пролета между ячейками должны быть одинаковыми. Так как в каждой ячейке кинетическая энергия увеличивается на одну и туже величину ΔW , то после пролета n ячеек энергия и скорость ядра будут равны

$$W = n\Delta W\begin{cases} W_n = n\Delta W \\ \frac{mV_n^2}{2} = W_n \end{cases} \Rightarrow \quad V_n = V_1\sqrt{n}. \qquad (22)$$

Из условия постоянства времен пролета

$$\frac{l_1}{V_1} = \frac{l_n}{V_n} = \frac{l_n}{V_1\sqrt{n}}. \qquad (23)$$

следует, что длины труб должны удовлетворять условию

$$\boxed{l_n = l_1\sqrt{n}} \qquad (24)$$