Задание 2. Взаимодействия цилиндрических магнитов (Решение)

Часть 1. Характеристики магнита.

1.1 Так как, плотность и геометрические размеры цилиндрического магнита заданы, то расчет его массы труда не представляет:

$$m = \rho V = \rho \frac{\pi d^2}{4} h = 7{,}6 \cdot 10^3 \frac{\pi \cdot \left(4{,}0 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot 10{,}0 \cdot 10^{-3}}{4} = 9{,}6 \cdot 10^{-4}\, кг\,. \qquad (1)$$

1.2 Магнитный момент магнита рассчитывается по определению намагниченности

$$M_R = \frac{p_m}{V} \quad \Rightarrow \quad p_m = M_R V\,. \qquad (2)$$

Используя заданную связь между намагниченностью и остаточной индукцией $B_R = \mu_0 M_R$, получим требуемый результат

$$p_m = M_R V = \frac{B_R}{\mu_0} \cdot \frac{\pi d^2}{4} h = 0{,}14\, A \cdot м^2\,. \qquad (3)$$

1.3 Расчет силы тока намагничения можно провести по формуле магнитного момента, выражаемого через силу тока намагничения

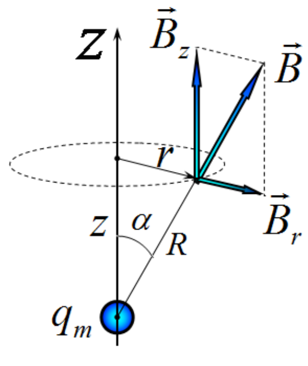
$$p_m = IS \quad \Rightarrow \quad I_m = \frac{p_m}{S} = \frac{B_R}{\mu_0}\frac{V}{S} = \frac{B_R}{\mu_0} h\,. \qquad (4)$$

Численный расчет можно провести по любой из приведенных формул

$$I_m = \frac{B_R}{\mu_0} h = \frac{1{,}6}{4\pi \cdot 10^{-7}} 10 \cdot 10^{-3} = 1{,}1 \cdot 10^4\, A\,. \qquad (5)$$

Поразительно, удивительно, но…

Часть 2. Магнитное поле магнита.

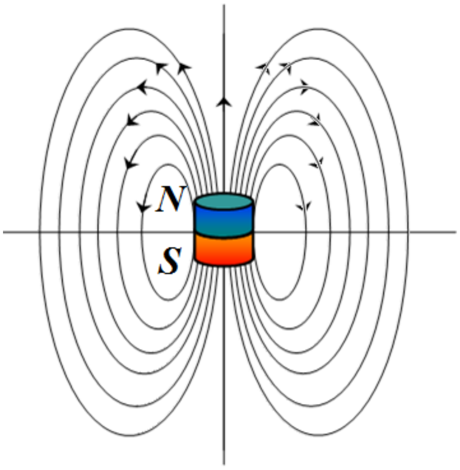


2.1 Требуемые компоненты индукции поля точечного магнитного заряда находятся из формулы «типа Кулона» $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{R^2}$ и рисунка:

$$B_z^{(0)}(z,r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{R^2}\cos\alpha = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{z}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}\,. \qquad (5)$$

$$B_r^{(0)}(z,r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{R^2}\sin\alpha = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{r}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}\,. \qquad (6)$$

2.2 Картина силовых линий магнитного диполя (поля линейного магнита, поля кругового тока, поля Земли и т.д.) приводится во всех учебниках физики, начиная с детского сада.



2.3 Для решения данного пункта задачи можно воспользоваться подсказкой, приведенной в условии. Второй подход – используя принцип суперпозиции, записать точное выражение для индукции поля и провести разложение полученного выражения по малому параметру a. Здесь приведено решения по первому, более короткому пути.

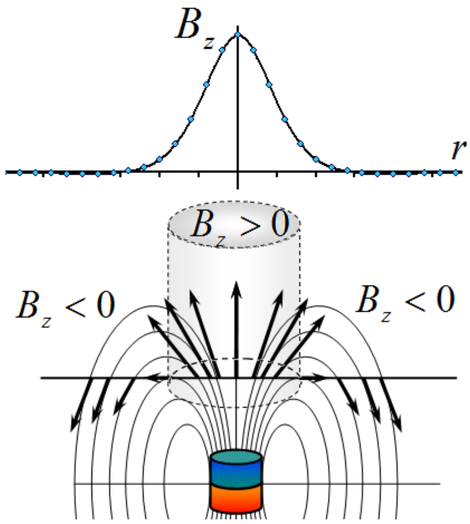
$$B_z(z,r) = B_z^{(0)}(z,r) - B_z^{(0)}(z+a,r) = -\left(B_z^{(0)}(z,r)\right)_z' \cdot a\,. \tag{7}$$

Аккуратное вычисление производной от функции (5) приводит к результату:

$$\boxed{\begin{aligned} B_z(z,r) &= -\left(B_z^{(0)}(z,r)\right)_z' \cdot a = -\frac{\mu_0 q_m a}{4\pi}\left(\frac{z}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}\right)' = \\ &= -\frac{\mu_0 q_m a}{4\pi}\frac{\left(z^2+r^2\right)^{3/2} - z\frac{3}{2}\left(z^2+r^2\right)^{1/2}\cdot 2z}{\left(z^2+r^2\right)^3} = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi}\frac{2z^2-r^2}{\left(z^2+r^2\right)^{5/2}}\,. \end{aligned}} \tag{8}$$

2.4 Схематический график этой функции можно построить на основе качественного анализа (функция четная, нули функции при $r = \pm\sqrt{2}z$, очевидны участки монотонности, стремление к нулю с отрицательно стороны при $z \to \pm\infty$). Результат построения показан на рисунке.

Данный график можно построить и на основании анализа картины силовых линий – просто рассматривая знак проекции вектора индукции поля (как показано на следующем рисунке).



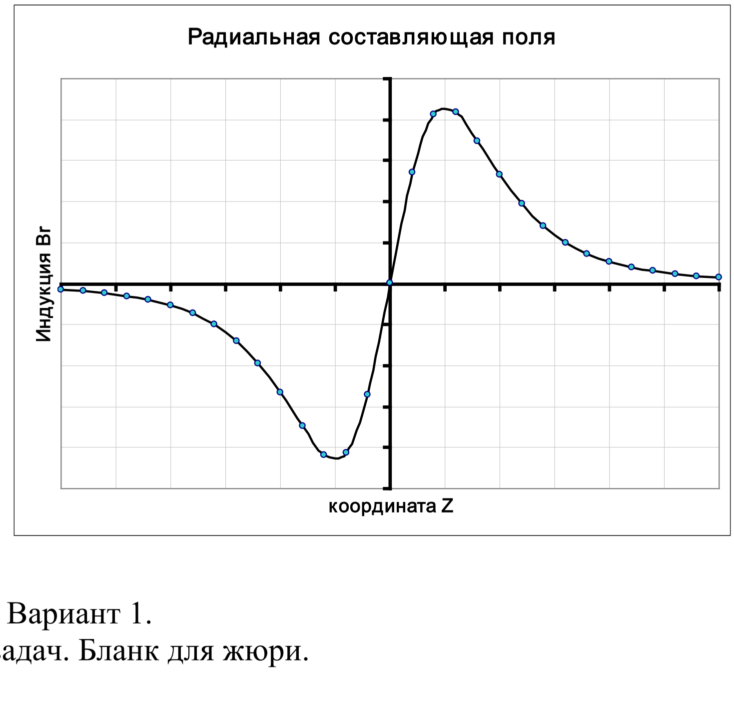
2.5 Значения индукции поля на оси можно получить, полагая $r = 0$ в формуле (8):

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \frac{2z^2 - r^2}{\left(z^2 + r^2\right)^{5/2}}\Bigg|_{r=0} = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi z^3}. \qquad (9)$$

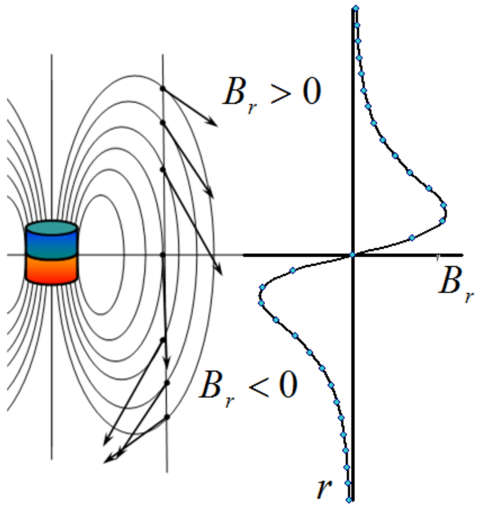
2.6 Радиальная компонента поля рассчитывается аналогично (и несколько проще):

$$B_r(z,r) = B_r^{(0)}(z,r) - B_r^{(0)}(z+a,r) = -\left(B_r^{(0)}(z,r)\right)_z' \cdot a =$$
$$= -\frac{\mu_0 q_m a}{4\pi} \cdot \left(\frac{r}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}\right)' = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \cdot \frac{3}{2} \frac{r \cdot 2z}{\left(z^2+r^2\right)^{5/2}} = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \frac{3zr}{\left(z^2+r^2\right)^{5/2}}. \qquad (10)$$

2.7 График этой функции также строится на основе качественного анализа (функция нечетная: обращается в нуль при $z = 0$; стремиться к нулю при $z \to \pm\infty$). Результат – на рисунке.



Схематический график этой зависимости можно также построить на основании анализа картины силовых линий (см. рисунок).



2.8 Поиск экстремумов функции проводится стандартным методом – в точках экстремумов производная функции обращается в нуль. Поэтому вычислим производную от функции (10) и приравняем ее к нулю:

$$\left(B_r(z,r)\right)'_z = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi}3r\left(\frac{z}{\left(z^2+r^2\right)^{5/2}}\right)'_z = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi}3r\frac{\left(z^2+r^2\right)^{5/2} - z\frac{5}{2}\left(z^2+r^2\right)^{3/2}\cdot 2z}{\left(z^2+r^2\right)^5} = \qquad (11)$$
$$= \frac{\mu_0 p_m}{4\pi}3r\frac{r^2-4z^2}{\left(z^2+r^2\right)^{7/2}} = 0$$

Из полученного уравнения следует, что положение экстремума $z^* = \pm b = \pm\frac{r}{2}$. Значения функции в экстремуме равно

$$B_{r\max}(z,r) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi}\left.\frac{3zr}{\left(z^2+r^2\right)^{5/2}}\right|_{z=\frac{r}{2}} = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{5/2}\frac{\mu_0 p_m}{4\pi}\frac{1}{r^3} = C\frac{\mu_0 p_m}{r^3}. \qquad (12)$$

Здесь безразмерная константа равна $C = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{4}{5}\right)^{5/3} \approx 0{,}068$.

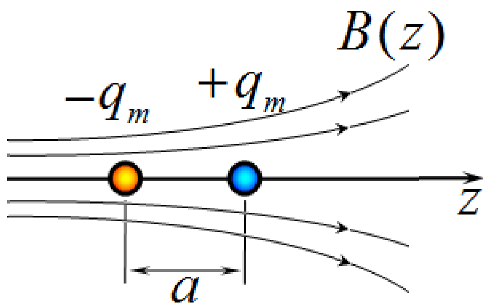
Таким образом, полный ответ на вопросы данного пункта:

$$\boxed{b = \frac{r}{2};\quad B_{r\max} = C\frac{\mu_0 p_m}{r^3};\quad C = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{4}{5}\right)^{5/3} \approx 0{,}068.} \qquad (13)$$

Часть 3. Притяжение и отталкивание.

3.1 Рассмотрим магнитный диполь, находящийся в неоднородном магнитном поле $B(z)$. Ось диполя совпадает с направлением поля (что соответствует условию рассматриваемой задачи). В этом случае суммарная сила, действующая на диполь, равна

$$F = -q_m B(z) + q_m B(z+a). \qquad (14)$$



Учитывая малость величины a, это выражение можно преобразовать к виду

$$F = -q_m B(z) + q_m B(z+a) = q_m a \frac{B(z+a) - B(z)}{a} \approx p_m B'(z). \qquad (15)$$

где $B'(z)$ - производная от зависимости индукции поля по координате. Зависимость индукции поля на оси от координаты задается формулой (9). Поэтому сила взаимодействия между магнитами равна

$$\boxed{F = p_m B'(z) = p_m \left(\frac{\mu_0 p_m}{2\pi z^3}\right)' = -\frac{3\mu_0 p_m^2}{2\pi z^4}. \qquad (15)}$$

3.2 При ориентации магнитов, указанной на рис. а), сила магнитного отталкивания уравновешивает силу тяжести:

$$\frac{3\mu_0 p_m^2}{2\pi L^4} = mg. \qquad (16)$$

Из этого уравнения находим искомое расстояние

$$\boxed{L = \sqrt[4]{\frac{3\mu_0 p_m^2}{2\pi mg}}. \qquad (17)}$$

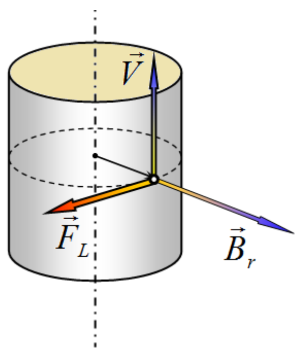
3.3 Реализовать экспериментально можно только вариант, а), так как в этом случае положение равновесия является устойчивым. В случае б) положение равновесия неустойчивое.

3.4 Подстановка ранее найденных численных значений параметров в формулу (17) приводит к результату:

$$\boxed{L = 3{,}3\,см. \qquad (17)}$$

Часть 4. Магнитная вязкость – токи Фуко.

4.1 При движении магнита в каждой точке стенке трубки изменяется магнитное поле, в следствие чего в ней возникают электрические токи, называемые тока Фуко. Для расчета их характеристики удобно перейти в систему отсчета, связанную с магнитом. В этой системе трубка движется магнитном поле, поэтому источником ЭДС является сила Лоренца, действующая на заряды, которая возникает благодаря радиальной составляющей индукции поля магнита. Сила Лоренца направлена по касательной к поверхности трубки. Величина этой силы равна



$$F_L = qVB_r. \qquad (18)$$

Соответственно, ЭДС, возникающая в контуре, охватывающем трубку равна

$$\varepsilon = \frac{1}{q} F_L \cdot 2\pi r_0 = 2\pi r_0 B_r V \quad . \qquad (19)$$

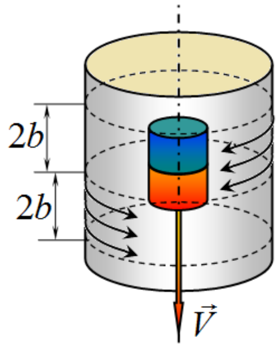
Теперь с помощью закона Ома определим силу тока

$$\Delta I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{\rho \dfrac{2\pi r_0}{\Delta z\, h_0}} = \frac{2\pi r_0 B_r V}{\rho \dfrac{2\pi r_0}{\Delta z\, h_0}} = \frac{B_r V \Delta z\, h_0}{\rho}. \qquad (20)$$

Наконец, воспользуемся рекомендуемым приближением для функциональной зависимости радиальной составляющей поля:

$$\Delta I = \frac{B_{r\max} V \Delta z\, h_0}{\rho}. \qquad (20)$$

4.2 Ток возникает во всех частях трубки, в которых имеется радиальное магнитное поле. В рамках используемого «ступенчатого» приближения радиальная составляющая имеется в полосе шириной 4β. Отметим, что направление тока не существенно, так как мощность выделяющейся теплоты не зависит от направления тока. Поэтому можно записать, что «эффективная» сила тока равна



$$I = \frac{B_{r\max} V\, h_0}{\rho} \cdot 4b. \qquad (21)$$

Мощность теплоты, выделяющейся в трубке, рассчитывается по закону Джоуля – Ленца:

$$P = I^2 R, \qquad (22)$$

где $R = \rho \dfrac{2\pi r_0}{4bh_0}$ - электрическое сопротивление части стенки трубки.

по которой протекает электрический ток. Собирая все промежуточные результаты, получим результат

$$P = \left(\frac{B_{r\max} V\, h_0}{\rho} \cdot 4b \right)^2 \rho \frac{2\pi r_0}{4bh_0} = \frac{8\pi r_0 b h_0}{\rho} B_{r\max}^2 V^2. \qquad (23)$$

4.3 Рассчитанную мощность теплоты можно связать с мощность, развиваемой силой вязкого магнитного трения:

$$P = F \cdot V. \qquad (24)$$

С помощью формулы (24) находим явное выражение для этой силы

$$F = \frac{8\pi r_0 b h_0}{\rho} B_{r\max}^2 V. \qquad (25)$$

4.4 Приравняем найденное значение силы вязкого трения к силе тяжести падающего магнита

$$\frac{8\pi r_0 b h_0}{\rho} B_{r\max}^2 V = mg, \qquad (26)$$

Откуда найдем формулу для скорости установившегося движения

$$V = \frac{mg\rho}{8\pi r_0 b h_0 B_{r\max}^2}. \qquad (27)$$

4.5 Осталось добросовестно провести численные расчеты: $B_{r\max} = C \dfrac{\mu_0 p_m}{r_0^3} = 0{,}45\, Тл$;

$$V = \frac{mg\rho}{8\pi r_0 b h_0 B_{r\max}^2} = 3{,}9 \frac{см}{с}. \qquad (28)$$