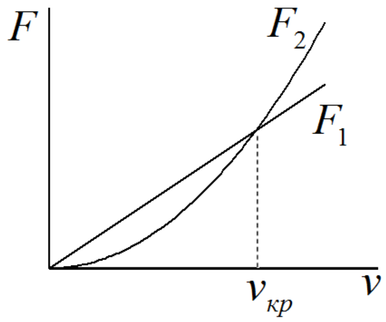
Задание 3. Дождевые облака (Решение)

1.1 Графики зависимости силы сопротивления от скорости показаны на рисунке. Из этого рисунка следует, что формулу следует применять при скоростях меньше критической, а формулу (2) при скоростях больших критической.



1.2 Приравняем силы, задаваемые формулами (1) и (2) в условии задачи

$$\frac{1}{2}C_x\rho v^2\cdot\pi r^2=6\pi\eta r v\,. \qquad (1)$$

Из этого выражения следует, что критическая скорость равна

$$v_{кр}=\frac{12\eta}{C_x\rho r}=0{,}37\,\frac{м}{с}\,. \qquad (1)$$

1.3 Очевидно, что скорость падения капель значительно превышает величину найденной критической скорости. Поэтому для расчета силы сопротивления следует пользоваться формулой (2).

1.4 При скорости установившегося движения сила тяжести, действующая на каплю, уравновешивается силой сопротивления воздуха. Поэтому ее можно найти из условия

$$\frac{1}{2}C_x\rho V^2\cdot\pi r^2=mg=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0 g \quad\Rightarrow\quad V=\sqrt{\frac{8\rho_0 g}{3C_x\rho}r}\,. \qquad (2)$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$V=\sqrt{\frac{8\rho_0 g}{3C_x\rho}r}=\sqrt{\frac{8\rho_0 g}{3C_x\rho}r_0}=V_0\sqrt{\frac{r}{r_0}}\,. \qquad (3)$$

Что и требовалось доказать.

1.5 Значение критической скорости для шарика радиуса $r_0=1{,}0\,мм$. как следует из формулы (3) равно

$$V_0=\sqrt{\frac{8\rho_0 g}{3C_x\rho}r_0}=6{,}75\,\frac{м}{с}\,. \qquad (4)$$

1.6 Вторая, большая капля будет падать быстрее, разность времен падения рассчитывается по «детской» формуле:

$$\Delta t=\frac{H}{V_0}\left(1-\sqrt{\frac{r_0}{r_2}}\right)=74с\,. \qquad (5)$$

1.7 При падении капли ее скорость будет изменяться по закону

$$V = V_0\sqrt{1-\gamma t} \approx V_0 - V_0\frac{\gamma t}{2}. \tag{6}$$

Т.е. движение капли будет равноускоренным. Поэтому закон движения капли будет иметь вид

$$\boxed{z(t) = V_0 t - V_0\frac{\gamma t^2}{4}.} \tag{7}$$

Часть 2. Капля в облаке

2.1 Сила сопротивления, определяется формулой (2) из условия задачи, в случае движения воздуха, под скоростью тела следует понимать относительную скорость: т.е. скорость тела относительно движущегося воздуха. В системе отсчета связанной с воздухом, установившаяся скорость капли есть V. которая определяется формулой (3).
Следовательно, в системе отсчета. связанной с землей скорость движения капли равна

$$v = U - V \tag{8}$$

Если радиус капли не изменяется и равен $r_0 = 1{,}0\,мм$. то установившаяся скорость подъема капли будет равна

$$\boxed{v = U - V_0 = 23\frac{м}{с}.} \tag{9}$$

2.2 При изменении радиуса капли скорость ее подъема будет изменяться. Так в условии оговорено, что капля достигает установившейся скорости очень быстро. то можно считать, что в любой момент времени скорость капли определяется формулой (7). Так как радиус капли изменяется, то изменяется и величина V. **В этом случае формула (7) описывает зависимость скорости капли от времени:**

$$v(t) = U - V(t) = U - V_0\sqrt{\frac{r(t)}{r_0}} \tag{10}$$

Здесь использована полученная ранее зависимость скорости установившегося движения от радиуса капли (3).
Условие остановки капли может быть сформулировано различными способами:
- скорость капли стала равной нулю;
- относительная скорость капли стала равной по модулю скорости подъема;
- сила сопротивления стала равной силе тяжести;

и т.д.
При любом подходе должно выполняться соотношение

$$U = V_0\sqrt{\frac{r_S}{r_0}} \tag{11}$$

Из этого условия рассчитываем радиус остановившейся капли

$$\boxed{r_S = r_0\left(\frac{U}{V_0}\right)^2 = 20мм} \tag{12}$$

2.3 В данном пункте нам фактически необходимо найти закон движения капли $x(t)$ по известной зависимости скорости от времени. Используя приведенную в условии зависимость радиуса от времени, запишем явную зависимость скорости от времени

$$v(t) = U - V_0\sqrt{\frac{r(t)}{r_0}} = U - \frac{V_0}{\sqrt{r_0}}(\alpha t)^{1/4}. \qquad (13)$$

Используя «серьезную математическую подсказку» можно сразу записать закон движения капли

$$z(t) = Ut - \frac{V_0}{\sqrt{r_0}}(\alpha)^{1/4}\frac{4}{5}t^{5/4} = Ut\left(1 - \frac{4}{5}\frac{V_0}{U}\sqrt[4]{\frac{\alpha t}{r_0^2}}\right). \qquad (14)$$

здесь z - вертикальная координата капли, отсчитываемая от нижнего края облака.
Этот закон описывает движение капли, как вверх, так и вниз. Как следует из выражения (13) в момент остановки τ_1 выполняется условие

$$\alpha\tau_1 = r_0^2\left(\frac{U}{V_0}\right)^4 \qquad (15)$$

Следовательно, время подъема капли равно

$$\boxed{\tau_1 = \frac{r_0^2}{\alpha}\left(\frac{U}{V_0}\right)^4 = 1{,}3\cdot10^3 с \approx 20 мин.} \qquad (16)$$

Подставляя это выражение в закон движения (13). получаем, что максимальная высота подъема равна

$$\boxed{z_{\max} = \frac{1}{5}U\tau_1 = 7{,}8\cdot10^3 м.} \qquad (17)$$

2.4 Из формулы (13) следует, что в момент возвращения капли к нижнему краю облака τ_2 будет выполнено условие

$$\frac{4}{5}\frac{V_0}{U}\sqrt[4]{\frac{\alpha\tau_2}{r_0^2}} = 1. \qquad (18)$$

Так как $\alpha\tau_2 = r_m^2$, (r_m - максимальный радиус градины при ее возвращении к нижней границе облака), то из формулы (18) следует. что этот радиус равен

$$\boxed{r_m = \left(\frac{5}{4}\frac{U}{V_0}\right)^2 = 31 мм.} \qquad (19)$$

Не мало, но такие градины бывают (см. рис.). Кроме того, они частично растают при полете к земле.