

Условие

Задача 1. (20 баллов) В данной задаче рассматривается ряд эффектов, связанных с исследованием совместного движения большого числа частиц. Во всех пунктах задачи ускорение свободного падения считать известным и равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, сопротивлением воздуха можно пренебречь (можете считать, что описываемые ниже события происходят на другой планете). Поверхность земли следует считать плоской. Обратите внимание на численные расчеты (все они оцениваются), допускается проводить промежуточные вычисления и затем использовать полученные численные данные.

Сверхмощный снаряд массой $m = 600$ кг выпущен из пушки с начальной скоростью $v_0 = 6,2 \cdot 10^2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Через время $t_0 = 30$ с после выстрела он разорвался на очень большое число мелких осколков. Скорости осколков относительно снаряда направлены примерно равномерно во все стороны, а величины этих скоростей лежат в диапазоне от 0 до максимального значения $u = 1,2 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.1 За какое время звук от разрыва дойдет до артиллеристов, выпустивших снаряд? Скорость звука в воздухе $v_{\text{зв}} = 3,3 \cdot 10^2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.2 Опишите форму, размеры и положение «облака» осколков через время $\tau_1 = 20$ с после разрыва.

1.3 Оцените массу осколков, которые еще будут находится в воздухе через время $\tau_2 = 60$ с после разрыва.

1.4 Покажите, что через любой промежуток времени τ после разрыва два осколка, находящиеся в воздухе, движутся друг относительно друга со скоростью пропорциональной расстоянию между ними, причем их относительная скорость $\vec{V}_{\text{отн}}$ направлена вдоль прямой, соединяющей эти осколки, т.е. $\vec{V}_{\text{отн}} = a\vec{r}$, (где $\vec{r}$ - вектор соединяющий данные осколки). Чему равна величина коэффициента a в этой формуле?

1.5 Согласно космологической гипотезе «Большого взрыва», когда-то вся Вселенная была сжата в точку. После «Большого взрыва» она начала расширяться, причем это расширение продолжается до настоящего времени. Астрономические наблюдения свидетельствуют, что все галактики удаляются от нас, причем скорость убегания галактик возрастает пропорционально расстоянию до них. Экспериментальный закон Хаббла говорит, что скорость «убегания» V прямо пропорциональна расстоянию до галактики R

$$V = HR,$$

где H - постоянная величина, называемая постоянной Хаббла. Если скорость «убегания» галактики V измерять в $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, а расстояние R в световых годах (как это принято в астрономии), то постоянная Хаббла оценивается величиной, лежащей в диапазоне $H = (15 \div 30) \cdot 10^{-6} \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot (\text{св.год})}$. Считая, что постоянная Хаббла не изменялась с течением времени, оцените возраст Вселенной.

Световой год - расстояние, которое проходит свет за год. Скорость света $c = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Решение

Задача 9.1.

1.1 Запишем закон движения снаряда в системе отсчета, ось X которой горизонтальна, а ось Y вертикальна, начало отсчета совпадает с точкой вылета

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Вычислим прежде всего время полета снаряда T . Полагая $y = 0$, из второго уравнения системы находим

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 6,2 \cdot 10^2 \cdot \sin 45^\circ}{9,8} \approx 89,5 \text{ с} \quad (2)$$

Итак, во время разрыва снаряд будет находиться в воздухе. Поэтому расстояние до него и время распространения звука Δt можно вычислить с помощью закона движения (1)

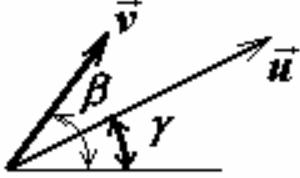
$$\Delta t = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{v_{\text{зв}}} = \frac{\sqrt{(v_0 t_0 \cos \alpha)^2 + \left(v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{gt_0^2}{2}\right)^2}}{v_{\text{зв}}} \approx 48 \text{ с.} \quad (3)$$

Можно подсчитать высоту и расстояние, на которой произошел разрыв

$$y_0 = v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{gt_0^2}{2} \approx 8,74 \cdot 10^3 \text{ м}; \quad x_0 = v_0 t_0 \cos \alpha \approx 13,2 \cdot 10^3 \text{ м}$$

и далее использовать эти значения.

1.2 Скорость каждого осколка можно представить как сумму скорости снаряда $\vec{v}$ в момент разрыва и скорости осколка относительно снаряда $\vec{u}$. Направления этих скоростей удобно определять по углам отклонения от горизонта.



Запишем координаты (в той же системе) осколка через время τ после разрыва

$$\begin{cases} x = x_0 + (v_x + u \cos \gamma) \tau \\ y = y_0 + (v_y + u \sin \gamma) \tau - \frac{g\tau^2}{2} \end{cases}$$

подставив значения координат и компонент скорости снаряда в момент разрыва, получим закон движения

$$\begin{cases} x = v_0 t_0 \cos \alpha + (v_0 \cos \alpha + u \cos \gamma) \tau \\ y = v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{gt_0^2}{2} + (v_0 \sin \alpha - gt_0 + u \sin \gamma) \tau - \frac{g\tau^2}{2} \end{cases}$$

который можно привести к виду

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha (t_0 + \tau) + u \tau \cos \gamma \\ y = v_0 \sin \alpha (t_0 + \tau) - \frac{g(t_0 + \tau)^2}{2} + u \tau \sin \gamma \end{cases} \quad (4)$$

Эти уравнения допускают простую интерпретацию: движение осколков можно представить как сумму (Таим образом, облако осколков в любой момент времени будет представлять собой шар, центр которого находится на параболе, описываемой системой (1), а радиус определяться скоростью самых быстрых осколков $R = u\tau$.)

Через время τ_1 после разрыва координаты центра «облака» будут равны

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha (t_0 + \tau_1) \approx 22 \text{ км} \\ y = v_0 \sin \alpha (t_0 + \tau_1) - \frac{g(t_0 + \tau_1)^2}{2} \approx 9,8 \text{ км} \end{cases} \quad (5)$$

Радиус облака $R = u\tau \approx 24$ км. Таким образом, это облако частично будет «поглощено» поверхностью земли.

1.3 Время $(t_0 + \tau_2) = 90$ с примерно соответствует времени движения неразорвавшегося снаряда, поэтому в этот момент центр облака коснется поверхности земли. Следовательно, в полете будет находится примерно половина осколков, их масса $m_1 \approx \frac{m}{2} = 300$ кг.

1.4 Для определения относительных скоростей осколков удобно перейти в систему отсчета, связанную с центром облака O . (Эта система отсчета, конечно, неинерциальная, но так нас интересуют только кинематические проблемы, то неинерциальность системы никакой роли не играет). В этой системе отсчета скорости осколков постоянны и направлены радиально. Если за время τ осколок пролетел расстояние r , то его скорость равна $u = \frac{r}{\tau}$. Учитывая

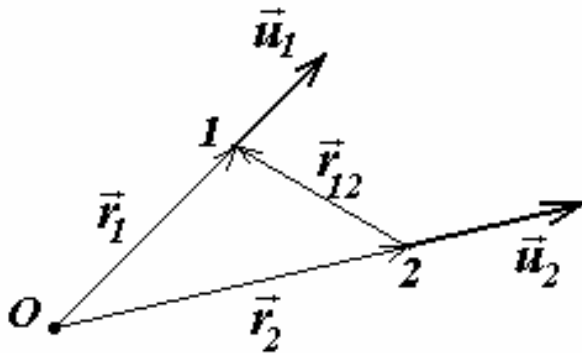
направление скорости, это соотношение можно записать в векторной форме $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{\tau}$. Тогда относительная скорость одного осколка (первого) относительно второго равна разности их скоростей

$$\vec{u}_{\text{отн}} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \frac{1}{\tau}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\vec{r}_{12}}{\tau}, \quad (6)$$

что и требовалось доказать. Как следует из данной формулы, требуемый коэффициент пропорциональности равен

$$a = \frac{1}{\tau}. \quad (7)$$

1.5 Закон Хаббла совпадает с полученным законом разлета осколков (6), поэтому постоянная Хаббла есть величина обратно пропорциональная времени существования вселенной. Поэтому время жизни Вселенной можно оценить,



как величину обратную этой постоянной $T \approx \frac{1}{H}$. Для численных расчетов постоянную Хаббла необходимо перевести в систему СИ. Вычислим длину светового года (достаточная точность - порядок величины)

$$1 \text{ св. год} \approx 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с} \approx 9,5 \cdot 10^{15} \text{ м} \approx 10^{16} \text{ м}$$

Тогда

$$H = (15 \div 30) \cdot 10^{-6} \frac{\text{км}}{c \cdot (\text{св. год})} = (15 \div 30) \cdot 10^{-6} \frac{10^3 \text{ м}}{c \cdot 10^{16} \text{ м}} \approx$$

$$\approx (15 \div 30) \cdot 10^{-19} c^{-1}$$

Оценка максимального времени жизни Вселенной имеет вид

$$T \approx \frac{1}{H} \approx \frac{1}{15 \cdot 10^{-19} c^{-1}} \approx 7 \cdot 10^{17} c \approx \frac{7 \cdot 10^{17}}{365 \cdot 24 \cdot 3600} \text{ лет} \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ лет}$$

Вторая граница в два раза меньше. Таким образом, время жизни Вселенной оценивается в 10-20 миллиардов лет.

Схема оценивания.

Пункт	Содержание	Баллы	Примечания
1.1	Расчет времени распространения звука - закон движения снаряда - равномерность распространения звука - численный расчет	5	2 1 2
1.2	Форма «облака» - закон движения осколков - разложение движения на составляющие - облако - шар - численный расчет координат центра и радиуса	5	1 2 1 1
1.3	Масса осколков в воздухе	1	
1.4	Относительная скорость - использование системы отсчета - скорость пропорциональна расстоянию до центра - выражение для относительной скорости - правильное значение коэффициента пропорциональности	4	1 2 1 1
1.5	Время жизни Вселенной - использование аналогии с расчетом осколков - время жизни обратно постоянной Хаббла - численный расчет	5	1 2 2
	ИТОГО	20	
	За неверное число значащих цифр		-2