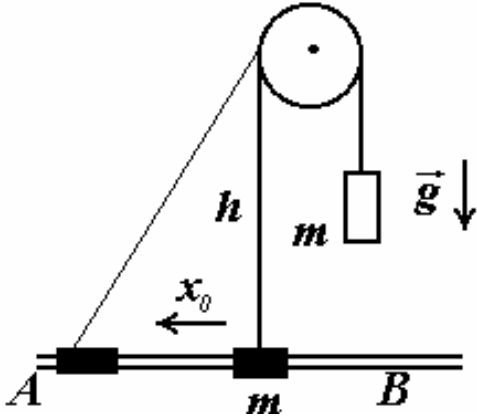


Условие

1. Муфта массы m насажена на жесткий гладкий горизонтальный стержень АВ и с помощью легкой нерастяжимой веревки и неподвижного гладкого блока уравновешена грузом такой же массы m . Муфту сместили на расстояние x_0 . Расстояние от оси блока до стержня h . Найдите: а) совершенную при сдвигании муфты работу внешних сил; б) максимальную скорость муфты при движении; в) постройте примерные графики зависимостей скоростей муфты и груза от координаты муфты; г) пусть $h = 1,0$ см, $x_0 = 1,0$ м. Оцените период колебаний муфты.



Решение

1. При смещении муфты на расстояние x висящий груз поднимется на высоту

$$y = \sqrt{x^2 + h^2} - h. \quad (1)$$

Вычисляя производную по времени от этого выражения, установим связь между скоростями муфты v и груза u

$$u = v \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}. \quad (2)$$

Заметим, что последнее соотношение $u = v \cos \alpha$ можно найти путем геометрических векторных построений. а) Работа внешних сил при смещении муфты равна изменению потенциальной энергии груза, поэтому

$$A = mgy = mg \left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - h \right). \quad (3)$$

б) Заметим, что когда муфта проходит положение равновесия (нить вертикальна), скорость груза обращается в нуль. Поэтому муфта будет иметь максимальную скорость именно при прохождении положения равновесия, так как в этом положении изменение потенциальной энергии максимально, и вся запасенная энергия (3) перейдет в кинетическую энергию муфты. Эту максимальную скорость найдем из закона сохранения механической энергии

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = mg \left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - h \right),$$

или

$$v_{\max} = \sqrt{2g \left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - h \right)}. \quad (4)$$

в) Для определения скорости муфты в произвольной точке опять воспользуемся законом сохранения механической энергии (кинетическая энергия муфты и груза равна изменению потенциальной энергии груза):

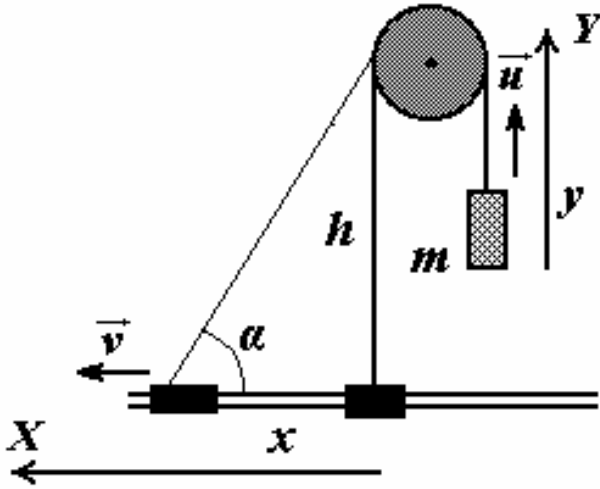
$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = mg \left(\left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - h \right) - \left(\sqrt{x^2 + h^2} - h \right) \right).$$

Используя соотношение (2), находим искомые скорости муфты

$$v = \sqrt{2g \frac{x^2 + h^2}{2x^2 + h^2} \left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - \sqrt{x^2 + h^2} \right)}, \quad (5)$$

и груза

$$u = \sqrt{2g \frac{x^2}{2x^2 + h^2} \left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - \sqrt{x^2 + h^2} \right)}. \quad (6)$$

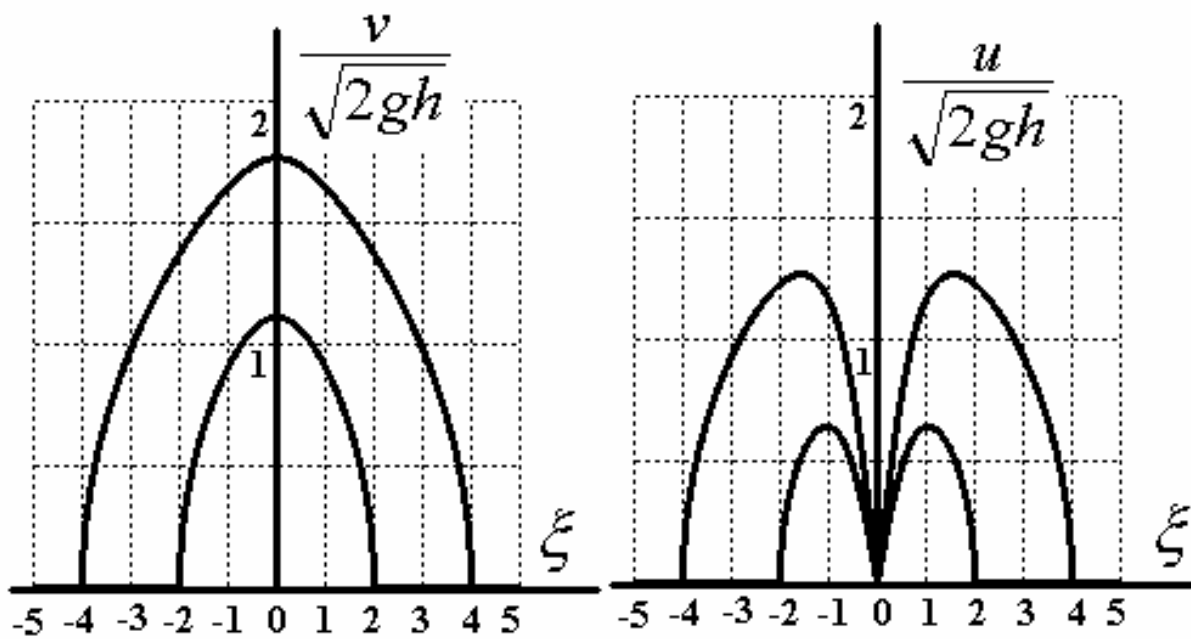


Для построения графиков этих функций их удобно представить в виде

$$\frac{v}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{\xi^2 + 1}{2\xi^2 + 1}} \left(\sqrt{\xi_0^2 + 1} - \sqrt{\xi^2 + 1} \right); ,$$

$$\frac{u}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{\xi^2}{2\xi^2 + 1}} \left(\sqrt{\xi_0^2 + 1} - \sqrt{\xi^2 + 1} \right);$$

где обозначено $\xi = \frac{x}{h}$. Графики модулей этих функций (при $\xi_0 = 2$, $\xi_0 = 4$) представлены на рисунке.



г) Обратим внимание, что численные значения параметров таковы, что $x_0 \gg h$. Поэтому практически все время движения (за исключением малого участка вблизи положения равновесия) нить, удерживающая муфту, горизонтальна. В этом случае можно приближенно считать, что муфта движется с постоянным ускорением $a = \frac{g}{2}$ (убедитесь в этом самостоятельно). Следовательно, время ее движения от крайнего положения до положения равновесия определяется формулой $\tau = \sqrt{\frac{2x_0}{a}} = 2\sqrt{\frac{x_0}{g}}$, а период движения, очевидно в четыре раза больше $T = 8\sqrt{\frac{x_0}{g}} \approx 2,5c$.