

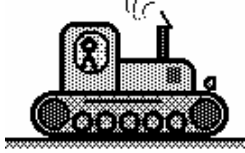
Просто разминка

Условие

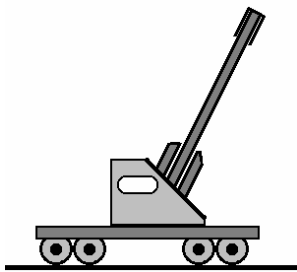
Задание 1. «Просто разминка»

Ускорение свободного падения на поверхности Земли считать равным $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

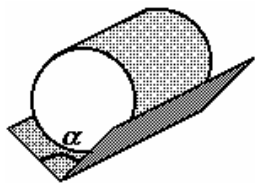
1.1 Верхняя часть гусеницы трактора движется относительно земли со скоростью $V_0 = 2,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. С какой скоростью движется трактор?



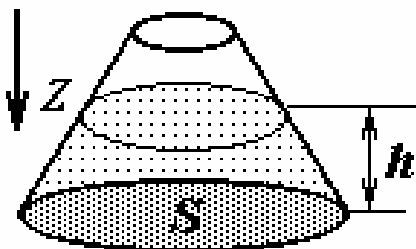
1.2 Ствол пушки, размещенной на железнодорожной платформе, расположен под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Платформа может двигаться по горизонтальным рельсам. Начальная скорость вылета снаряда равна $V_0 = 400 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Чтобы увеличить дальность полета снаряда платформу разгоняют до скорости $v_1 = 72 \frac{\text{км}}{\text{час}}$. На сколько процентов увеличится дальность полета снаряда, выпущенного с движущейся платформы, по сравнению с дальностью полета снаряда, выпущенного с жестко закрепленной платформы? Масса платформы значительно больше массы снаряда. Военные действия происходят на Марсе, где можно пренебречь сопротивлением атмосферы.



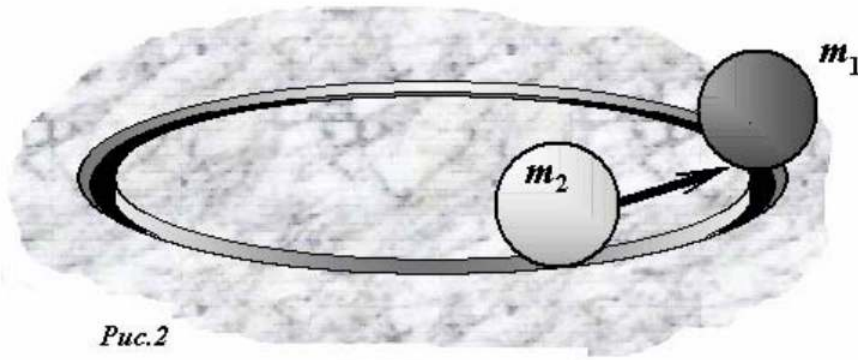
1.3 Желоб изготовлен из двух широких одинаковых досок, образующих двугранный угол $\alpha = 60^\circ$. Желоб расположили так, что его ребро горизонтально, а стороны симметричны относительно вертикали. Внутри желоба положили цилиндр массой $m = 2,0 \text{ кг}$. Коэффициент трения между стенками желоба и боковой поверхностью цилиндра равен $\mu = 0,30$. Какую минимальную горизонтально направленную силу необходимо приложить к цилиндру, чтобы он начал двигаться вдоль желоба, параллельно ребру?



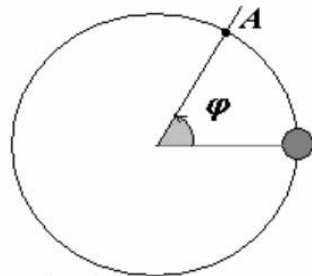
1.4 В вертикальный сосуд, имеющий форму усеченного конуса, налита вода, масса которой равна $m = 1,0 \text{ кг}$. Высота уровня воды в сосуде равна $h = 10 \text{ см}$. Площадь дна сосуда равна $S = 200 \text{ см}^2$. Чему равна суммарная сила давления воды на боковые стенки сосуда?



1.5 На твердой горизонтальной поверхности сделан неглубокий круговой желобок, по которому, как по направляющим могут двигаться без трения два небольших шарика (Рис. 2). Масса первого шарика $m_1 = 20,0$ г, второго $m_2 = 30,0$ г. Радиусы шариков малы, по сравнению с радиусом желобка. Второму шарiku сообщают некоторую скорость в направлении покоящегося первого. Шары сталкиваются между собой абсолютно упруго. Укажите точку тринадцатого столкновения между шарами. *Указание. Положение точки на окружности удобно задавать с помощью угла φ , отсчитываемого от начального положения неподвижного шара (Рис.3)*



с радиусом желобка. Второму в направлении покоящегося между собой абсолютно упруго. ния между шарами. жности удобно задавать с от начального положения



Решение

Задание 1. «Просто разминка»

1.1 Очевидно, что скорость трактора равна $V = \frac{V_0}{2} = 1,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.2 Дальность полета снаряда, выпущенного из неподвижного орудия, определяется формулой

$$S_0 = \frac{2V_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1)$$

где V_0 - скорость снаряда относительно ствола. Чтобы достичь максимальной дальности, выстрел, очевидно, необходимо производить в направлении движения платформы. В этом случае к горизонтальной составляющей скорости снаряда относительно пушки добавится скорость движения платформы, поэтому закон движения снаряда будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= (V_0 \cos \alpha + v_1)t \\ y &= V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Определим время полета снаряда (из условия $y = 0$): $t_1 = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}$ и подставим его в выражение для горизонтальной координаты для определения дальности полета

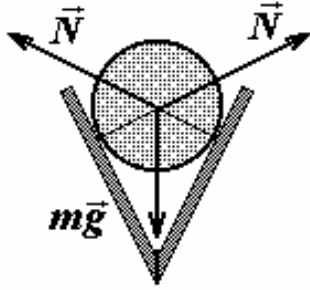
$$S_1 = (V_0 \cos \alpha + v_1) \frac{2V_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \left(1 + \frac{v_1}{V_0 \cos \alpha} \right).$$

Таким образом, относительное увеличение дальности полета составит

$$\frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{v_1}{V_0 \cos \alpha} = 10\%$$

При наличии понимания, решение может быть получено почти мгновенно: - так как время полета снаряда определяется только вертикальной составляющей скорости, то оно не зависит от скорости платформы; - дальность полета (при постоянном времени движения) пропорциональна горизонтальной составляющей скорости снаряда; *- следовательно, $\frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{(V_0 \cos \alpha + v_1) - V_0 \cos \alpha}{V_0 \cos \alpha} = \frac{v_1}{V_0 \cos \alpha} = 10\%$.*

1.3 Чтобы сдвинуть цилиндр, к нему необходимо приложить силу, превышающую силу трения. Изобразим силы, действующие на цилиндр в проекции на вертикальную плоскость. Так как силы реакции направлены перпендикулярно поверхности, то тройка сил: две силы реакции и сила тяжести направлены под равными углами 120° друг к другу. Так проекция ускорения на вертикальную плоскость равна нулю, то сумма изображенных сил также равна нулю. Следовательно, модули этих сил равны, то есть $N = mg$. Таким образом, суммарная сила трения (и искомая сила) равна $F_{\text{тр}} = 2\mu N = 2\mu mg = 12\text{Н}$.



1.4 Суммарная сила давления воды на дно и стенки сосуда по модулю равна силе тяжести и направлена в противоположную сторону: $\rho ghS + F_{\text{ст.}} = mg$. Из этого уравнения находим $F_{\text{ст.}} = mg - \rho ghS \approx -10\text{Н}$, т.е. эта сила направлена вверх.

1.5 Обозначим начальную скорость второго шарика u_0 и найдем скорости шариков v_1 и v_2 после первого столкновения (Рис.1), используя уравнения законов сохранения импульса и механической энергии

$$m_2 u_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (1)$$

$$\frac{m_2 u_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (2)$$

Для быстрого решения этой системы уравнений перепишем ее в виде

$$m_2(u_0 - v_2) = m_1 v_1, \quad (3)$$

$$m_2(u_0^2 - v_2^2) = m_1 v_1^2. \quad (4)$$

и разделим второе уравнение на первое. При этом мы, конечно, теряем одно решение системы

$$v_2 = u_0, v_1 = 0, \quad (5)$$

но это решение соответствует начальным условиям – скоростям шарика до удара, а нам необходимо второе решение:

$$u_0 + v_2 = v_1.$$

Подстановка этого соотношения в уравнение (1) позволяет легко найти интересующее нас решение

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} u_0, \quad v_1 = \frac{2m_2}{m_2 + m_1} u_0. \quad (6)$$

Понятно, что скорость первого шарика больше скорости второго, поэтому, совершив полный оборот, первый шарик догонит второй в некоторой точке A_1 , повернутой относительно исходной на некоторый угол φ (Рис. 1). Для определения этого угла заметим, что до второго удара первый шарик пройдет путь

$$S_1 = (2\pi + \varphi)R \quad (7)$$

за время

$$t_1 = \frac{(2\pi + \varphi)R}{v_1}. \quad (8)$$

Аналогично, для второго шарика можно записать

$$S_2 = \varphi R, \quad t_2 = \frac{\varphi R}{v_1}. \quad (9)$$

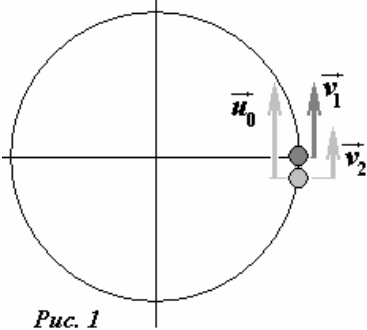
Приравнявая времена движения шариков, получим уравнение

$$\frac{(2\pi + \varphi)R}{v_1} = \frac{\varphi R}{v_2}. \quad (10)$$

из которого определим искомый угол φ , задающий положение точки столкновения

$$\varphi = \frac{2\pi}{\frac{v_1}{v_2} - 1}. \quad (11)$$

Вычислим значение этого угла, используя выражения для скоростей (6)



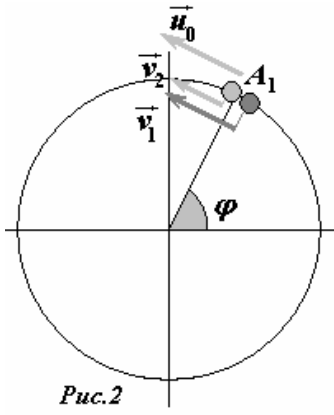


Рис. 2

$$\varphi = \frac{2\pi}{\frac{v_1}{v_2} - 1} = \frac{2\pi}{\frac{2m_2}{m_2 - m_1} - 1} = \frac{2\pi}{\frac{2 \cdot 30}{30 - 20} - 1} \approx \frac{2}{5}\pi. \quad (12)$$

Таким образом, мы определили точку второго столкновения. Для определения скоростей шариков после этого удара, следует составить систему уравнений, аналогичную (1)-(2). Однако подробно ее решать нет необходимости, так как ответ почти очевиден: если при начальных условиях (5) решением выражаются формулами (6), то теперь (6) являются начальными условиями, следовательно, решение выражается формулами (5). Иными словами, после второго удара шарики восстановят свои начальные скорости – второй будет двигаться со скоростью u_0 , а первый остановится! После второго удара второй шарик сделает полный оборот и столкнется с первым в той же точке A_1 . После этого повторится рассмотренная ситуация (только повернутая на угол φ): первый догоняет второй и т.д. Эти рассуждения позволяют указать точки всех столкновений шариков (Рис.3). Простым перечислением легко определить, что тринадцатое столкновение произойдет в точке, повернутой относительно исходного положения на угол, равный

$$\varphi_{13} = \frac{1}{5}\pi \approx 72^\circ.$$

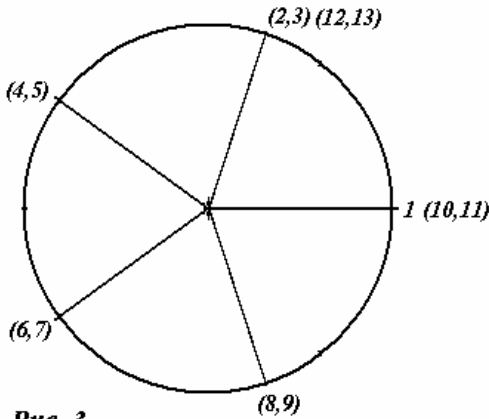


Рис. 3