

Вес и сжатие

Условие

Задание 2. «Вес и сжатие»

Реальные жидкости сжимаемы. Эксперименты показывают, что относительное уменьшение $\frac{\Delta V}{V_0}$ объема реальной жидкости ($\Delta V = (V - V_0) < 0$) прямо пропорционально увеличению внешнего давления $\Delta p = p - p_0$

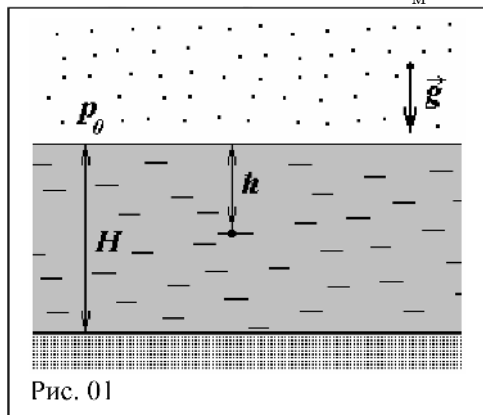
$$\frac{\Delta V}{V} = -\beta \Delta p \quad \Rightarrow \quad \Delta V = -\beta V \Delta p,$$

где коэффициент β — сжимаемость жидкости. Знак минус в (1) отражает тот факт, что при увеличении внешнего давления ($\Delta p > 0$) объем жидкости уменьшается.

Рассмотрим горизонтальный слой реальной жидкости глубиной H , находящийся в постоянном гравитационном поле земли. Плотность жидкости у поверхности слоя ρ_0 , ее сжимаемость β . Атмосферное давление p_0 (рис. 01).

1. «Самосжатие» Поскольку давление в жидкости увеличивается с глубиной, то нижние слои будут сжаты сильнее верхних.

1.1 Оцените уменьшение ΔH глубины слоя реальной жидкости под действием собственного веса. Вычислите ΔH для мирового океана, принимая, $H = 10,0$ км, плотность несжатой морской воды $\rho_0 = 1,03 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, сжимаемость морской воды $\beta = 4,71 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}$, $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.



1.2 «Плотность» Найдите зависимость $\rho(h)$ плотности воды от глубины h погружения. На сколько процентов увеличивается плотность морской воды на дне океана ($\rho(H = 10 \text{ км})$) по сравнению с ее плотностью у поверхности?

1.3 «Давление» Найдите зависимость давления $p(h)$ реальной жидкости от глубины h погружения. Атмосферное давление p_0 .

1.4. «Утонувший летучий голландец» При какой плотности ρ_1 однородный брусок, начавший тонуть у поверхности мирового океана, «зависнет» на глубине $h = 5,00$ км?

В ряде учебных пособий рассматривается равномерно заряженная по объему жидкость. Будем считать, что способ ее получения уже известен.

2. «Заряженная жидкость» Рассмотрим слой несжимаемой непроводящей жидкости глубиной H . Плотность жидкости ρ , объемная плотность ее заряда постоянна и равна γ . Ускорение свободного падения g . Атмосферное давление p_0 .

2.1 Найдите зависимость давления $p(h)$ заряженной жидкости от глубины погружения h .

2.2 Оцените максимально возможную толщину слоя H_{max} заряженной жидкости.

2.3 Определите массу m непроводящего незаряженного кубика с ребром длиной a , если при опускании в заряженную жидкость он плавает в ней так, что его верхняя грань касается поверхности жидкости.

Решение

Задание 2. «Вес и сжатие»

1. «Самосжатие»

1.1 Рассмотрим слой воды малой толщины Δh_i , находящийся на глубине h_i . Уменьшение объема ΔV_i рассматриваемого слоя вследствие сжимаемости жидкости запишем как

$$\Delta V_i = V_0(1 - \beta \cdot p) - V_0 = -V_0\beta p = -S\Delta h_i\beta p,$$

где S — площадь рассматриваемого слоя.

Для оценки будем считать, что плотность жидкости остается приблизительно постоянной, тогда толщина сжатого слоя Δh_i^*

$$\Delta h_i^* = \Delta h_i(1 - \beta \cdot p) = \Delta h_i(1 - \beta \cdot \rho_0 g h_i),$$

где ρ_0 — плотность несжатой жидкости, g — ускорение свободного падения.

Соответственно, уменьшение δh_i его высоты вследствие эффекта самосжатия найдем как

$$\delta h_i = \rho_0 g \beta h_i \Delta h_i \quad (1)$$

Для нахождения полного сжатия ΔH всей жидкости просуммируем (1) по всем глубинам h_i

$$\Delta H = \sum_i \delta h_i = \sum_i \rho_0 g \beta h_i \Delta h_i = \rho_0 g \beta \sum_i h_i \Delta h_i = \rho_0 g \beta \frac{H^2}{2}. \quad (2)$$

Расчет для мирового океана дает

$$\Delta H = 238 \text{ м.}$$

1.2 «Плотность» С учетом эффекта самосжатия найдем плотность ρ реальной жидкости на глубине h

$$\rho(h) = \frac{m_i}{V_i} = \frac{m_i}{V_0(1 - \beta p_i)} = \frac{m_i}{V_0(1 - \beta \rho_0 g h)} \approx \rho_0(1 + \beta \rho_0 g h). \quad (3)$$

В (2) учтено, что параметр β (сжимаемость воды) очень мал, поэтому можно с достаточной точностью использовать приближение для малых x

$$\frac{1}{1 - x} \approx 1 + x.$$

Соответственно, относительное увеличение плотности воды в процентах на глубине H найдем как

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \cdot 100\% = \beta \rho_0 g H \cdot 100\% = 4,76\%. \quad (4)$$

Поскольку данные в условии задачи приведены с точностью до трех значащих цифр, то в ответе (4) (и далее!) мы также будем оставлять три значащие цифры.

Как видим из (4) даже при больших глубинах мирового океана относительное изменение плотности морской воды незначительно и составляет несколько процентов. Это позволяет считать жидкости практически несжимаемыми при решении ряда прикладных задач.

1.3 «Давление» Для вычисления давления $p(h)$ реальной жидкости на глубине h необходимо просуммировать давления, создаваемые более высокими тонкими слоями Δh_i , которые, согласно закону Паскаля, передаются нижним слоям

$$p(h) = \sum_i p_i = \sum_i \rho_i g \Delta h_i = g \sum_i \rho_i \Delta h_i,$$

где ρ_i — плотность жидкости на глубине i -го слоя.

Сумма в выражении (4), есть площадь S под графиком $\rho(h)$ зависимости (2) плотности жидкости от глубины, т.е. площадь трапеции (рис. 02).

Следовательно

$$p(h) = \frac{\rho_0 + \rho_0(1 + \beta \rho_0 g h)}{2} h = \rho_0 g h (1 + \frac{\rho_0 g \beta}{2} h). \quad (6)$$

Из (6) следует, что искомая зависимость представляет собой параболу с малым коэффициентом нелинейности.

С учетом того, что атмосферное давление p_0 также передается по закону Паскаля, окончательно получим

$$p(h) = p_0 + \rho_0 g h (1 + \frac{\rho_0 g \beta}{2} h). \quad (7)$$

1.4 «Утонувший летучий голландец» Предмет перестанет тонуть и будет находится в состоянии устойчивого равновесия на некоторой глубине при условии, что его плотность будет равна плотности морской воды на этой глубине.

Следовательно, плотность утонувшего летучего голландца можно найти, подставив в выражение (3) искомую глубину $h = 5,00$ км

$$\rho(h) = \rho_0 (1 + \beta \rho_0 g h).$$

Расчет с точностью до трех значащих цифр дает

$$\rho_1 = 1,05 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

2. «Заряженная жидкость» В данном пункте рассматривается несжимаемая жидкость.

2.1 Рассмотрим верхний слой жидкости глубиной h (рис. 03). Действующая на него сверху сила атмосферного давления $p_0 S$ и сила его тяжести $F_1 = \rho g h S$ уравниваются силой давления снизу $p(h) S$ и силой электростатического отталкивания $\vec{F}_2$ слоя толщиной h слоем толщиной $(H - h)$.

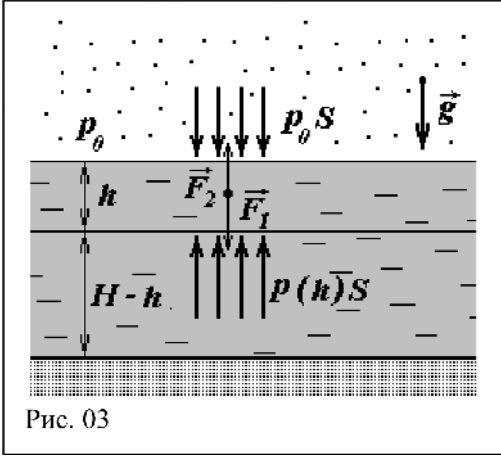
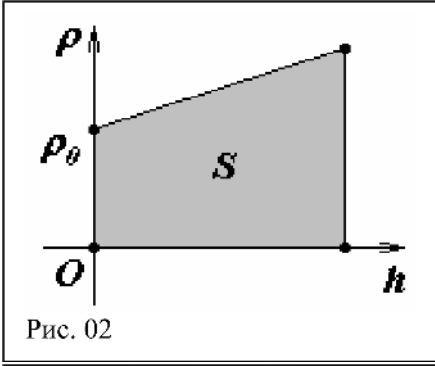
Напряженность электростатического поля, создаваемого слоем толщиной $(H - h)$ вне его может быть найдена, как

$$E(H - h) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\gamma(H - h)}{2\epsilon_0}.$$

Заряд слоя толщиной h найдем по определению объемной плотности заряда

$$q(h) = \gamma \cdot V = \gamma h S.$$

Следовательно, сила электростатического отталкивания верхнего слоя нижним равна



$$F_2 = E(H - h) \cdot q(h) = \gamma^2 \frac{(H - h)}{2\varepsilon_0} h S. \quad (8)$$

В результате условие равновесия слоя глубиной h примет вид

$$p_0 S + \rho g h S = \gamma^2 \frac{(H - h)}{2\varepsilon_0} h S + p(h) S.$$

Сокращая в последнем выражении на площадь S слоя, получим искомую зависимость давления в заряженной жидкости от глубины

$$p(h) = p_0 + \left(\rho g - \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0}\right) h + \frac{\gamma^2}{2\varepsilon_0} h^2. \quad (9)$$

2.2 Выражение (8) представляет собой квадратичную зависимость (параболу), ветви которой направлены вверх.

При малых h ($h \rightarrow 0$) ее «поведение» определяется линейным членом, который, в зависимости от толщины пластины H может быть как положительным, так и отрицательным. При максимально возможной толщине пластины H_{max} линейный член должен быть равен нулю. При этом верхние слои жидкости станут невесомы, т.е. $p(h \rightarrow 0) \approx p_0$. Отсюда найдем

$$\rho g = \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0} \Rightarrow H_{max} = \frac{2\rho g \varepsilon_0}{\gamma^2}. \quad (10)$$

При дальнейшем увеличении толщины заряженного слоя верхние частицы жидкости будут отрываться и улетать вверх, образуя «электрическое испарение».

2.3 Кубик некоторой массы, погруженный в заряженную жидкость, будет находиться в равновесии, если сила его тяжести будет уравновешена силой Архимеда.

Погружение кубика в заряженную жидкость не изменит распределения ее давления в нижележащих слоях.

Это позволяет записать следующее уравнение

$$mg = ((\rho g - \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0})a + \frac{\gamma^2}{2\varepsilon_0}a^2) \cdot a^2.$$

Отсюда найдем искомое значение массы кубика

$$m = \frac{((\rho g - \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0})a + \frac{\gamma^2}{2\varepsilon_0}a^2) \cdot a^2}{g}. \quad (11)$$