

## Осторожней на поворотах

### Условие

#### Задание 3. «Осторожней на поворотах»

В этой задаче мы предлагаем вам рассмотреть поведение автомобиля при повороте на большой скорости. Для этого необходимо познакомимся с таким явлением, как «увод» шины и выяснить, какие силы заставляют автомобиль поворачивать.

Поставим автомобильное колесо на движущуюся ленту транспортёра под некоторым маленьким углом  $\varphi$  к направлению движения ленты и приложим к нему вертикальную нагрузку  $N$  (рис. 1 и 2). Вначале колесо будет скользить и раскручиваться. Когда скольжение прекратится, исчезнет сила трения направленная вдоль плоскости колеса, однако останется некоторая сила, действующая в перпендикулярном направлении, стремящаяся увести колесо в сторону. Эта сила по своей сути является силой трения покоя. Причина её возникновения – деформация шины вблизи пятна контакта. Присутствие этой силы и заставляет автомобиль поворачивать, т.е. сумма сил увода, действующих на каждое колесо автомобиля, является центростремительной силой. Таким образом, при поворотах плоскость колеса всегда немного повёрнута относительно вектора скорости движения центра колеса (колёса едут не туда куда «смотрят»).

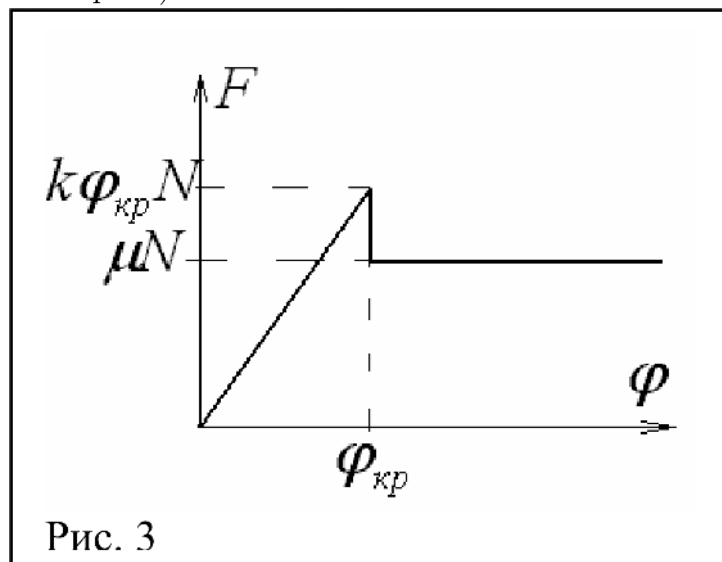


Рис. 3

е.  
ия  
т -  
де  
ли  
со  
й  
т.  
на  
и

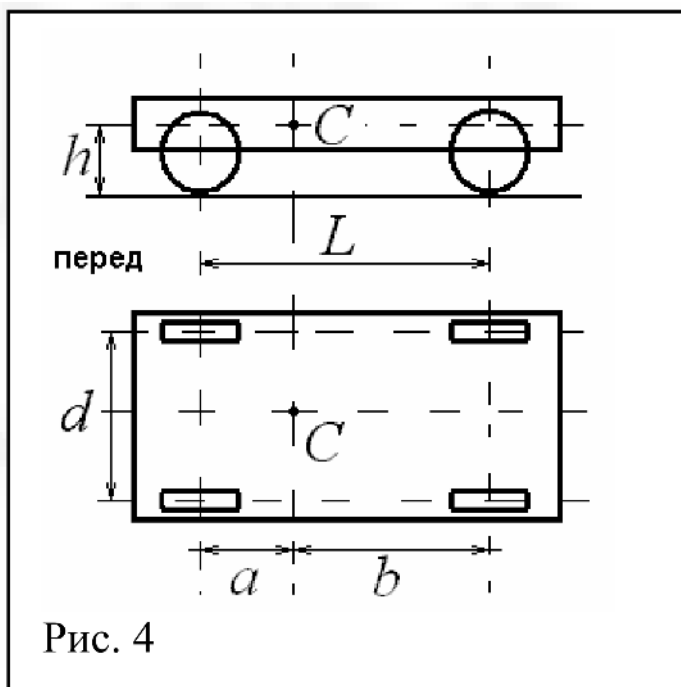


Рис. 4

Экспериментально установлено, что для малых углов  $\varphi$  сила  $F$  линейно растёт с увеличением  $\varphi$ , т.е.  $F = k \cdot \varphi \cdot N$ , где  $k$  - коэффициент сопротивления боковому уводу, который зависит от типа шины, а  $N$  - величина нагрузки. Когда  $\varphi$  превышает некоторое значение  $\varphi_{кр}$  (в реальных условиях  $\varphi_{кр}$  меньше десяти градусов), то начинается скольжение и сила трения резко падает до значения  $F = \mu N$ , где  $\mu$  - обычный коэффициент трения скольжения, т.е.  $k\varphi_{кр}N > \mu N$ . График зависимости силы трения, действующей на колесо, от угла  $\varphi$  между плоскостью колеса и направлением движения его центра представлен на рисунке 3..

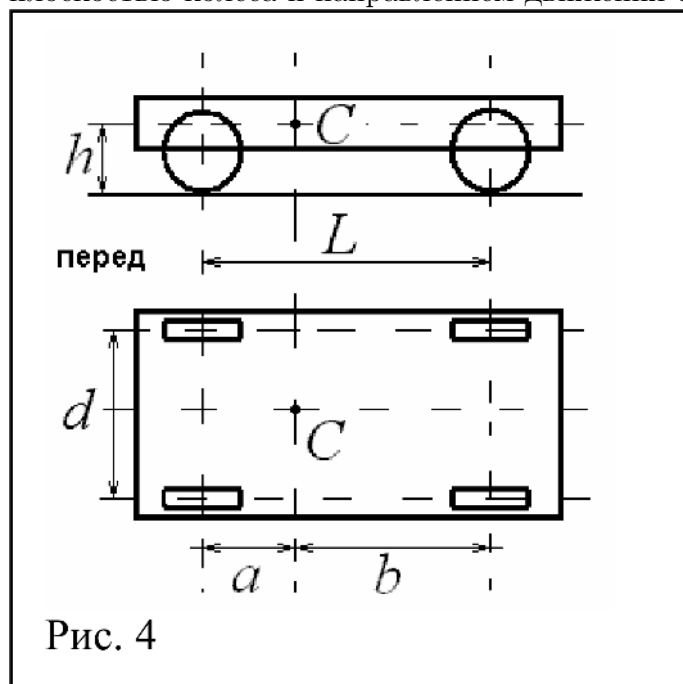
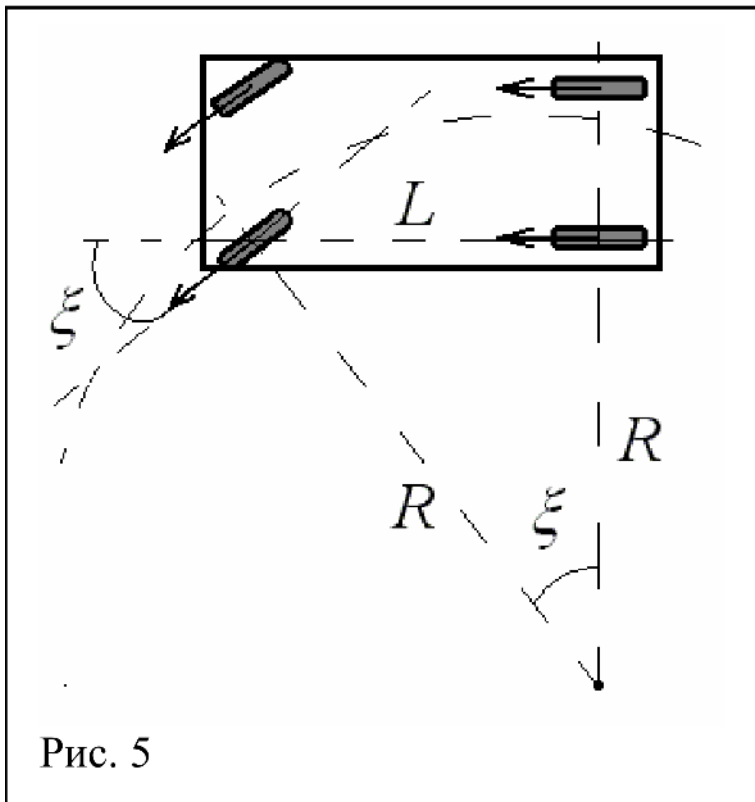
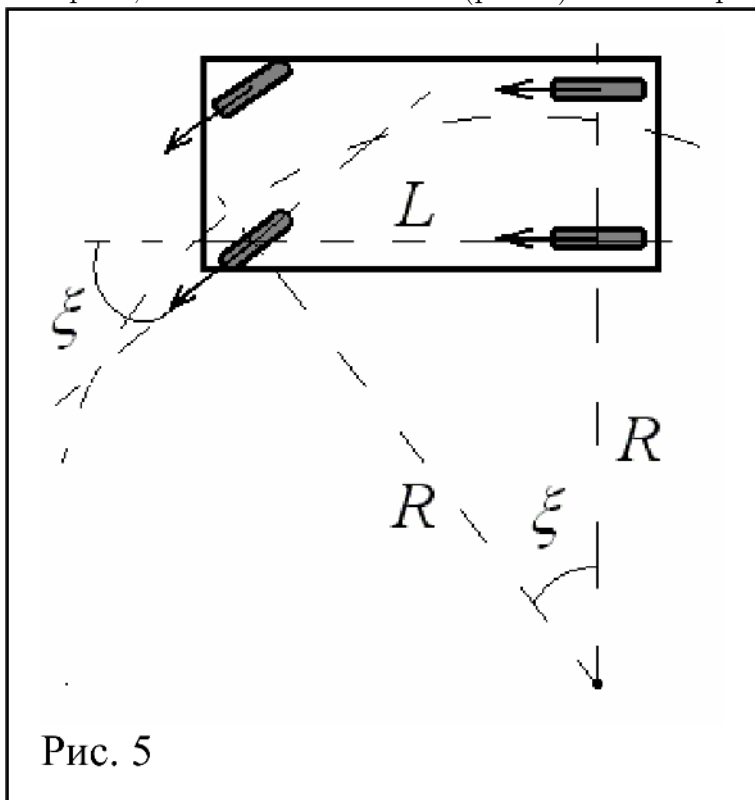


Рис. 4

Рассмотрим автомобиль со следующими характеристиками: масса –  $M$ , длина базы (расстояние между осями) –  $L$ , ширина (расстояние между колёсами одной оси) –  $d$ , расстояния от центра тяжести  $C$  до передней и задней оси равны соответственно  $a$  и  $b$  ( $a + b = L$ ), высота центра тяжести –  $h$ . Схематическое изображение автомобиля приведено на рисунке 4.

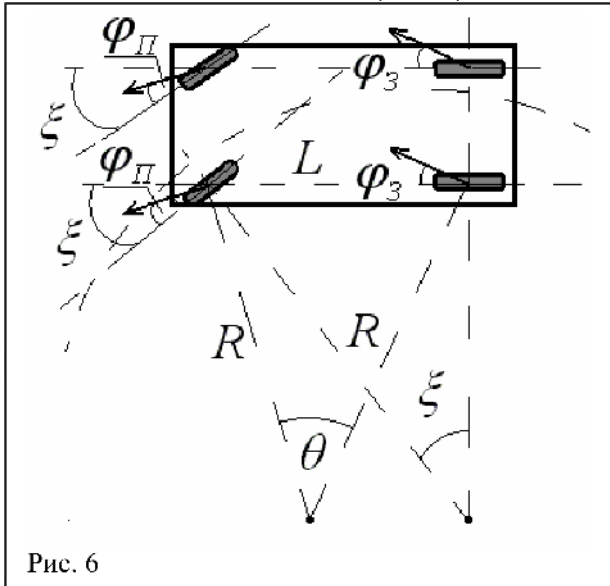


Углом поворота называется угол, под которым видна база автомобиля из центра кривизны поворота, т.е. отношение  $L$  к  $R$  (рис. 5). На этом рисунке



схематически изображён поворот автомобиля на очень маленькой скорости. При этом угол увода практически равен нулю (центростремительная сила очень маленькая) и векторы скоростей движения центров колёс лежат в их плоскостях. Т.е. при повороте передних колёс на

угол  $\xi$  относительно продольной оси корпуса, автомобиль также поворачивает под углом  $\xi$ . В задаче рассматриваются повороты достаточно большого радиуса (угол  $\xi$  очень маленький), поэтому можно пренебречь различиями в траектории левых и правых колёс автомобиля. При поворотах на большой скорости ситуация изменяется. Для того чтобы реализовать большую центростремительную силу, углы увода у колёс должны быть отличными от нуля. В итоге автомобиль поворачивает не под углом  $\xi$ , а под некоторым углом  $\theta$ . Ситуация быстрого поворота изображена на рисунке 6 (углы сильно преувеличены). Углы увода передних и задних колёс обозначены  $\varphi_{\text{П}}$  и  $\varphi_{\text{З}}$  соответственно.

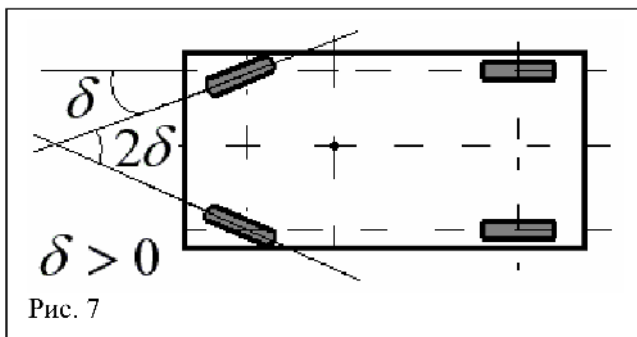


Приступим к анализу явления:

1. Выразите угол  $\theta$  через  $\xi$ ,  $\varphi_{\text{П}}$  и  $\varphi_{\text{З}}$ .
2. Автомобиль входит в левый поворот большого радиуса  $R$  на скорости  $v$ . Определите величину нагрузки на каждое колесо:  $N_{\text{ПЛ}}$ ,  $N_{\text{ПП}}$ ,  $N_{\text{ЗЛ}}$ ,  $N_{\text{ЗП}}$  (первый индекс: П – переднее, З – заднее; второй индекс: Л – левое, П – правое). Поворот проходится без скольжения. Для описания поведения автомобиля при поворотах используют термин «поворачиваемость». Поворачиваемость бывает нейтральная, избыточная или недостаточная. Т.е. при повороте передних колёс на некоторый угол  $\xi$ , автомобиль может поворачивать под этим же углом, под углом большим или меньшим  $\xi$ :  $\theta = \xi$ ,  $\theta > \xi$  или  $\theta < \xi$  соответственно.
3. Покажите, что при одинаковых коэффициентах увода  $k$  передних и задних шин автомобиль будет иметь нейтральную поворачиваемость. Имейте в виду, что углы очень маленькие, поэтому можно считать, что силы трения, действующие на колёса, направлены вдоль оси, соединяющей центр тяжести автомобиля и центр кривизны поворота, т.е. сонаправлены с центростремительным ускорением.
4. Определите максимальную безопасную (автомобиль не скользит) скорость  $v_{\text{max}}$  движения в повороте радиуса  $R$ . Критический угол увода равен  $\varphi_{\text{кр}}$ .

Далее шины также будем считать одинаковыми.

Для изменения поведения автомобиля на дороге меняют угол схождения передних



или задних колёс. Угол схождения положительный, если колёса «смотрят» вовнутрь и отрицательный, если наружу. Мы рассмотрим только случай изменения схождения передних колёс. На рисунке 7 изображена ситуация положительного схождения передних колёс. Угол для наглядности сильно преувеличен, в реальности его величина составляет единицы градусов.

5. Определите, при каких  $\delta$  автомобиль обладает избыточной, а при каких недостаточной поворачиваемостью.
6. Покажите, что при избыточной поворачиваемости существует максимальная скорость  $v_{crit}$  устойчивого прямолинейного движения автомобиля. Определите эту скорость.
7. Определите максимальную безопасную скорость  $v'_{max}$  движения в повороте радиуса  $R$  при избыточной поворачиваемости. Критический угол увода равен  $\varphi_{кр}$ .

скорость  $v_{crit}$  устойчивого прямолинейного движения автомобиля. Определите эту скорость.

7. Определите максимальную безопасную скорость  $v'_{max}$  движения в повороте радиуса  $R$  при избыточной поворачиваемости. Критический угол увода равен  $\varphi_{кр}$ .

УТВЕРЖДЕНО Заместитель председателя оргкомитета заключительного этапа республиканской олимпиады К.С. Фарино. «\_\_\_\_\_» декабря 2006 года

\*\*\*Республиканская физическая олимпиада (III этап) 2007 год Теоретический тур

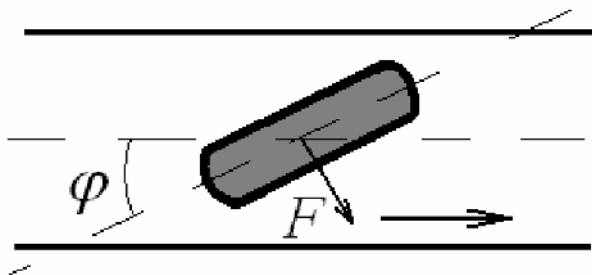


Рис. 2

1. В  
 2. И  
 3. М  
 4. Ы  
 5. Я  
 6.  $\varphi$

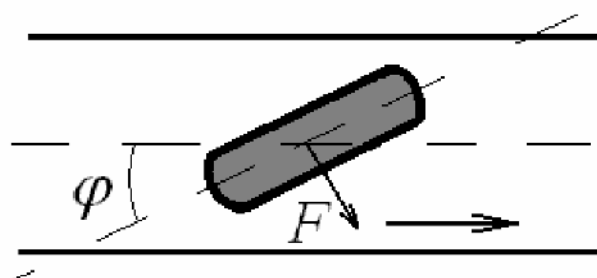
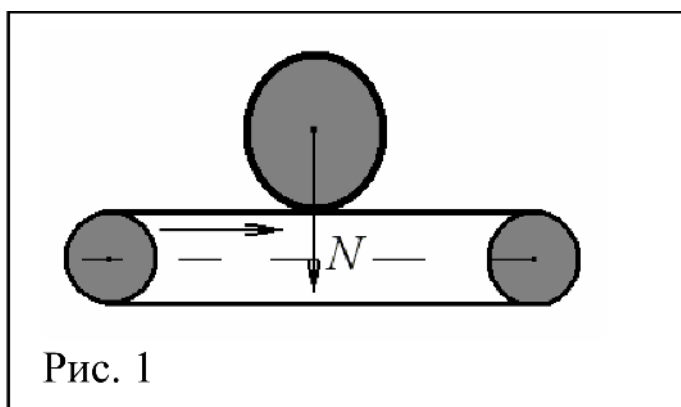
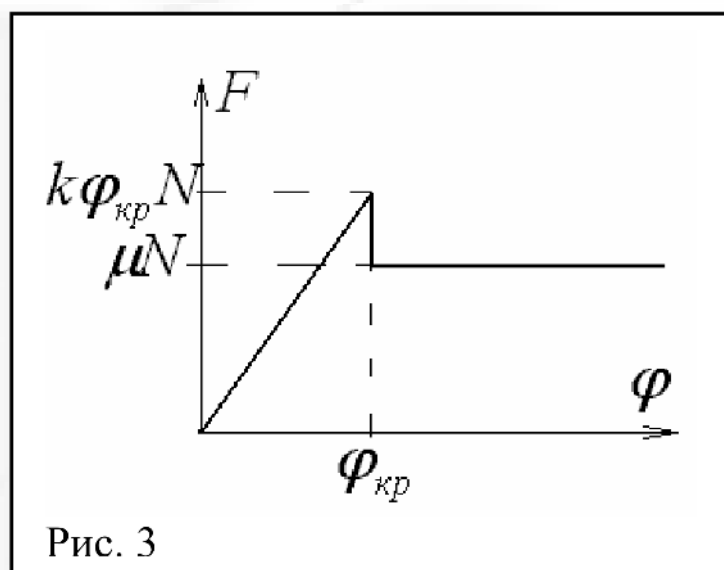
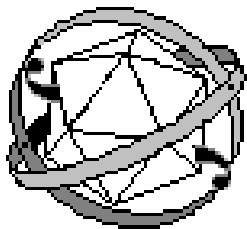


Рис. 2





## Решение

### Задание 3. «Осторожней на поворотах»

1. Легко заметить из рисунка 1, что наличие угла увода у передних колёс уменьшает угол поворота, а у задних — увеличивает. Т.е.

$$\theta = \xi - \varphi_{\text{П}} + \varphi_{\text{З}} \quad (1)$$

2. Нагрузки на колёса равны силам реакции дороги на эти колёса. Для нахождения этих величин необходимо записать второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось, а также уравнения для равенства моментов относительно нескольких осей, чтобы получить четыре независимых уравнения. Однако можно поступить проще. Если автомобиль постоит, то силы реакции определить не трудно:

$$\begin{aligned} N_{\text{Пл}}^0 &= N_{\text{Пп}}^0 = \frac{1}{2} \frac{Mgb}{L} \\ N_{\text{Зл}}^0 &= N_{\text{Зп}}^0 = \frac{1}{2} \frac{Mga}{L} \end{aligned} \quad (2)$$

При левом повороте, к правым колёсам приложится дополнительная нагрузка  $\Delta N = \frac{1}{2} \frac{Mv^2}{R} \frac{h}{d}$ , а сила, действующая на левые колёса, наоборот уменьшится на эту величину. Получим:

$$\begin{aligned} N_{\text{Пл}} &= \frac{1}{2} \frac{Mgb}{L} - \frac{1}{2} \frac{Mv^2}{R} \frac{h}{d} \\ N_{\text{Пп}} &= \frac{1}{2} \frac{Mgb}{L} + \frac{1}{2} \frac{Mv^2}{R} \frac{h}{d} \\ N_{\text{Зл}} &= \frac{1}{2} \frac{Mga}{L} - \frac{1}{2} \frac{Mv^2}{R} \frac{h}{d} \\ N_{\text{Зп}} &= \frac{1}{2} \frac{Mga}{L} + \frac{1}{2} \frac{Mv^2}{R} \frac{h}{d} \end{aligned} \quad (3)$$

3. Запишем условие равенства моментов сил относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести автомобиля:

$$(F_{\text{Пл}} + F_{\text{Пп}}) \cdot a = (F_{\text{Зл}} + F_{\text{Зп}}) \cdot b, \quad (4)$$

т.е. автомобиль не вращается. Подставляя значения сил, получим:

$$(k\varphi_{\text{П}} N_{\text{Пл}} + k\varphi_{\text{П}} N_{\text{Пп}}) \cdot a = (k\varphi_{\text{З}} N_{\text{Зл}} + k\varphi_{\text{З}} N_{\text{Зп}}) \cdot b \quad (5)$$

или

$$\varphi_{\text{П}} \cdot a \cdot (N_{\text{Пл}} + N_{\text{Пп}}) = \varphi_{\text{П}} \cdot b \cdot (N_{\text{Пл}} + N_{\text{Пп}}). \quad (6)$$

Подставив значения нагрузок, получим:

$$\varphi_{\Pi} = \varphi_3, \quad (7)$$

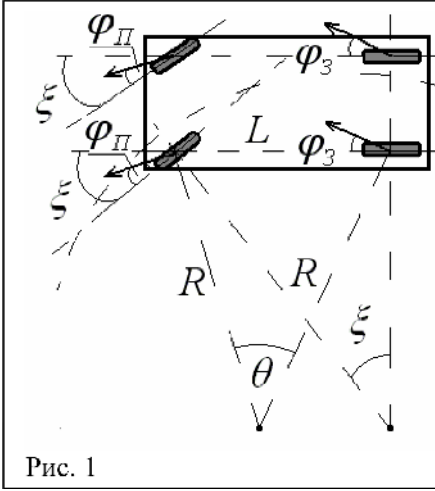
а значит

$$\theta = \xi \quad (8)$$

– нейтральная поворачиваемость. 4. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось «центр тяжести автомобиля – центр кривизны поворота»:

$$F_{\Pi\Pi} + F_{\PiЛ} + F_{3Л} + F_{3\Pi} = \frac{Mv^2}{R} \quad (9)$$

или, подставляя значения сил, и учитывая, что  $\varphi_{\Pi} = \varphi_3 = \varphi_{кр}$ ,



$$kMg\varphi_{кр} = \frac{Mv^2}{R}$$

Максимальная скорость равна

$$v_{\max} = \sqrt{k\varphi_{кр}Rg}$$

5. Рассмотрим движение в левом повороте. При наличии схождения передних колёс, углы увода левого и правого колёс отличаются от некоторого среднего значения  $\varphi_{\Pi}$  на величину  $\delta$ , т.е.

$$\begin{aligned} \varphi_{\Pi\Pi} &= \varphi_{\Pi} + \delta \\ \varphi_{\PiЛ} &= \varphi_{\Pi} - \delta \end{aligned}$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось «центр тяжести автомобиля – центр кривизны поворота» и условие равенства моментов сил относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести автомобиля:

$$\begin{cases} kN_{\PiЛ}(\varphi_{\Pi} - \delta) + kN_{\Pi\Pi}(\varphi_{\Pi} + \delta) + k\varphi_3(N_{3Л} + N_{3\Pi}) = \frac{Mv^2}{R} \\ (kN_{\PiЛ}(\varphi_{\Pi} - \delta) + kN_{\Pi\Pi}(\varphi_{\Pi} + \delta)) \cdot a = k\varphi_3(N_{3Л} + N_{3\Pi}) \cdot b \end{cases}$$

Решение системы:

$$\varphi_3 = \frac{v^2}{gkR} \text{ и } \varphi_{\Pi} = \frac{v^2}{gkR} - \delta \frac{v^2 h L}{R d g b}$$

Угол поворота:

$$\theta = \xi - \varphi_{\Pi} + \varphi_3 = \xi + \delta \frac{v^2 h L}{R d g b}$$

Необходимо учесть, что  $R = \frac{L}{\theta}$ , тогда

$$\theta = \xi + \delta \frac{v^2 h}{d g b} \theta$$

Выражая  $\theta$ , получим:

$$\theta = \frac{\xi}{1 - \delta \frac{v^2 h}{d g b}}$$

Делаем вывод: при положительном  $\delta$   $\theta > \xi$  – автомобиль обладает избыточной поворачиваемостью, при  $\delta < 0$  – недостаточной.

6. При определённой скорости движения знаменатель в формуле (17) обращается в нуль. Это значит, что при малейшем движении руля, угол поворота становится очень большим и автомобиль разворачивается. Значение критической скорости:

$$v_{crit} = \sqrt{\frac{d g b}{\delta \cdot h}}$$

7. По-прежнему рассматриваем левый поворот. Необходимо определить, какое колесо первым потеряет сцепления с дорогой. Предположим, что это будут задние колёса. Для того чтобы это произошло, необходимо, чтобы

$$v^2 = \varphi_{kp} g k R$$

В этом случае значение максимальной скорости совпадает со значением, полученным в пункте 4:

$$v_{max} = \sqrt{k \varphi_{kp} R g}$$

Однако необходимо проанализировать, действительно ли задние колёса сорвутся первыми. Единственным «конкурентом» является переднее правое колесо.

Подставим значение (19) в формулу (14) для  $\varphi_{\Pi}$ .

$$\varphi_{\Pi} = \varphi_{kp} - \delta \frac{\varphi_{kp} k h L}{d b} \quad (21)$$

Для переднего правого колеса:

$$\varphi_{ПП} = \varphi_{\Pi} + \delta = \varphi_{kp} - \delta \frac{\varphi_{kp} k h L}{d b} + \delta = \varphi_{kp} + \delta \left( 1 - \frac{\varphi_{kp} k h L}{d b} \right) \quad (22)$$

Из формулы (21) делаем вывод, что при

$$\varphi_{\kappa p} khL < db \quad (23)$$

значение  $\varphi_{\text{ПП}}$  будет больше  $\varphi_{\kappa p}$ , т.е. первым сорвется переднее правое колесо, после чего процесс станет необратимым. Для нахождения критической скорости, запишем условие достижения критического угла увода передним правым колесом.

$$\varphi_{\kappa p} = \frac{v^2}{gkR} + \delta \left( 1 - \frac{v^2 hL}{Rdgb} \right) \quad (24)$$

Выражая  $v$ , получим:

$$v'_{\max} = \sqrt{\frac{kRg(\varphi_{\kappa p} - \delta)}{1 - \delta \frac{hLk}{db}}} \quad (25)$$

Заметим, что если  $\varphi_{\kappa p} khL < db$ , то и  $\delta \cdot khL < db$ .

Таким образом, максимальная скорость определяется либо срывом задних колёс, либо срывом переднего правого колеса в зависимости от соотношения между величинами (23).