

Водная феерия

Условие

Задание 2. «Водная феерия»

2.1 В сосуде под крышкой находится перегретая вода, находящаяся при температуре $t_0 = 120^\circ\text{C}$. Какая доля (массовая) воды выкипит, если открыть крышку?

2.2 В теплоизолированном сосуде находится переохлажденная вода при температуре $t_0 = -5^\circ\text{C}$. Какая доля (массовая) воды замерзнет, если в сосуд бросить несколько маленьких кусочков льда?

2.3 В теплоизолированном сосуде находится $m_0 = 300\text{г}$ льда, находящегося при температуре $t_0 = -10^\circ\text{C}$. В сосуд впускают водяной пар, находящийся при температуре $t_1 = 100^\circ\text{C}$. Постройте примерный график зависимости температуры, установившейся в сосуде после достижения теплового равновесия, от массы впущенного пара (для массы, изменяющейся от нуля до $m_{\text{max}} = 120\text{г}$)

Во всех пунктах данной задачи теплоемкостью сосуда пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_1 = 4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot^\circ\text{C}}$, удельная теплоемкость льда $c_0 = 2,1 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot^\circ\text{C}}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$, удельная теплота парообразования воды $L = 2,2 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$. Давление газов в сосуде считать равным нормальному атмосферному давлению.

Решение

Задание 2. «Водная феерия»

2.1 При открывании крышки давление упадет до нормального атмосферного, при этом вода окажется перегретой – начнется вскипание, которое будет продолжаться до тех пор, ее температура не понизится до температуры кипения при нормальном атмосферном давлении, то есть до $t_1 = 100^\circ\text{C}$. При этом теплота, выделившаяся при остывании воды пойдет на испарение ее части Δm . Уравнение теплового баланса в этом случае примет вид

$$L\Delta m = c_1 m(t_0 - t_1), \quad (1)$$

из которого легко определить долю выкипевшей воды

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{c_1(t_0 - t_1)}{L} = \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot (120 - 100)}{2,2 \cdot 10^6} \approx 3,8 \cdot 10^{-2}. \quad (2)$$

Иными словами, выкипит около 4% воды.

2.2 При кристаллизации выделяется теплота, которая расходуется на нагревание оставшейся воды. Процесс кристаллизации будет продолжаться до тех пор, пока температура воды не станет равной $t_1 = 0^\circ\text{C}$. Уравнение теплового баланса в данном случае принимает вид

$$\lambda\Delta m = c_1 m(t_1 - t_0). \quad (1)$$

Откуда находим

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{c_1(t_1 - t_0)}{\lambda} = \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot (0 - (-5))}{330 \cdot 10^3} \approx 6,3 \cdot 10^{-2}. \quad (2)$$

Примечание: Малость доли воды, претерпевающей фазовый переход, позволяет пренебречь изменением теплоемкости смеси при фазовых превращениях.

2.3 В зависимости от количества впущенного пара могут реализовываться различные конечные состояния воды в сосуде: только лед, лед и жидкость, жидкость, жидкость и пар. Последовательно рассмотрим возможные процессы и конечные равновесные состояния при увеличении количества впущенного пара.

1. Пар сконденсировался, образовавшаяся вода остыла до температуры замерзания и частично замерзла – при этом температура льда не достигла температуры плавления. В этом случае уравнение теплового баланса имеет вид

$$Lm + c_1m(t_1 - t_{\text{пл.}}) + \lambda m + c_0m(t_{\text{пл.}} - t_x) = c_0m_0(t_x - t_0), \quad (1)$$

здесь и далее: m - масса впущенного пара, t_x - температура, установившаяся в сосуде после установления теплового равновесия, $t_{\text{пл.}} = 0,0^\circ\text{C}$ - температура плавления льда.

Из уравнения (1) находим требуемую зависимость:

$$t_x = \frac{Lm + c_1m(t_1 - t_{\text{пл.}}) + \lambda m + c_0mt_{\text{пл.}} + c_0m_0t_0}{c_0m + c_0m_0}. \quad (2)$$

Подставляя численные значения характеристик воды (удобно теплоту измерять в кДж, а массы в граммах), получим функцию

$$t_x = \frac{Lm + c_1m(t_1 - t_{\text{пл.}}) + \lambda m + c_0mt_{\text{пл.}} + c_0m_0t_0}{c_0m + c_0m_0} = \frac{(2200 + 4,2 \cdot 100 + 330)m + 2,1 \cdot 300 \cdot (-10)}{2,1 \cdot (300 + m)} = \frac{2950m}{6300 + m} \quad (3)$$

Температура льда достигнет нуля, при массе впущенного пара равной $m_1 = \frac{6300}{2950} \approx 2,1$ г.

Так как эта масса мала, то зависимость (3) является примерно линейной. Этот участок на графике обозначен «0-1».

2. *Количество пара превысило найденной значение $m_1 \approx 2,1$ г. При этом лед начал плавиться, но пара «не хватает», чтобы расплавить весь лед.* В этом случае в сосуде в состоянии равновесия окажется смесь льда и воды, находящаяся при температуре $t_{\text{пл.}} = 0,0^\circ\text{C}$. Найдем массу пара m_2 , при которой количество теплоты, выделившейся при конденсации пара и остывании образовавшейся воды, будет достаточно, чтобы нагреть лед до температуры плавления и полностью его расплавить. Из уравнения теплового баланса

$$Lm_2 + c_1m_2(t_1 - t_{\text{пл.}}) = c_0m_0(t_{\text{пл.}} - t_0) + \lambda m_0 \quad (4)$$

находим

$$m_2 = \frac{c_0m_0(t_{\text{пл.}} - t_0) + \lambda m_0}{L + c_1(t_1 - t_{\text{пл.}})} = \frac{2,1 \cdot 300 \cdot 10 + 330 \cdot 300}{2200 + 4,2 \cdot 100} \approx 40 \text{ г.} \quad (5)$$

Таким образом, при массе пара от $m_1 \approx 2,1$ г до $m_2 \approx 40$ г температура установившаяся в сосуде будет равна $t_{\text{пл.}} = 0,0^\circ\text{C}$ (участок «1-2» на графике).

3. *Весь лед расплавился, образовавшаяся при этом вода стала нагреваться.** В этом случае тепловой баланс имеет вид: теплота, выделившаяся при конденсации пара и остывании образовавшейся воды, расходуется на нагревание льда, его плавление и нагревание талой воды до равновесной температуры t_x , или на языке уравнения:

$$Lm + c_1m(t_1 - t_x) = c_0m_0(t_{\text{пл.}} - t_0) + \lambda m_0 + c_1m_0(t_x - t_{\text{пл.}}). \quad (6)$$

Из этого уравнения определяем

$$t_x = \frac{Lm + c_1mt_1 - c_0m_0(t_{\text{пл.}} - t_0) - \lambda m_0}{c_1m + c_1m_0}$$

$$= \frac{2200m + 4,2 \cdot 100m - 2,1 \cdot 300 \cdot 10 - 330 \cdot 300}{4,2m + 4,2 \cdot 300} = \frac{2620m - 105300}{4,2m + 1260} \quad (7)$$

Это участок на графике обозначен «2-3». Конечная температура достигнет температуры конденсации $t_1 = 100^\circ\text{C}$, если масса впускаемого пара превысит значение m_3 , которое также можно определить из уравнения (6), в котором следует положить $t_x = t_1$:

$$Lm_3 = c_0m_0(t_{n.} - t_0) + \lambda m_0 + c_1m_0(t_1 - t_{n.}). \quad (8)$$

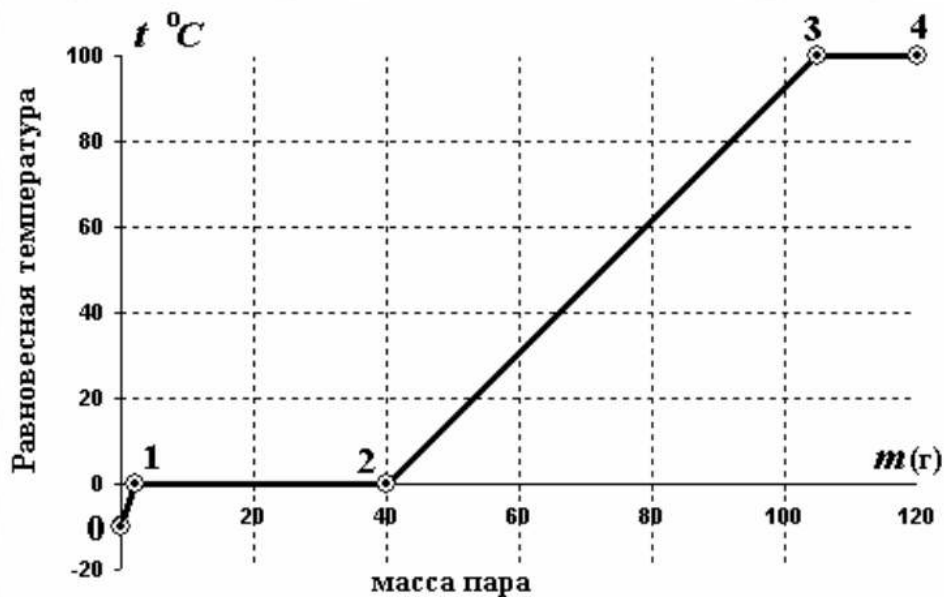
Или

$$\begin{aligned} Lm_3 &= c_0m_0(t_{n.} - t_0) + \lambda m_0 + c_1m_0(t_1 - t_{n.}) \\ m_3 &= \frac{c_0m_0(t_{n.} - t_0) + \lambda m_0 + c_1m_0(t_1 - t_{n.})}{L} = \\ &= \frac{2,1 \cdot 300 \cdot 10 + 330 \cdot 300 + 4,2 \cdot 300 \cdot 100}{2200} \approx 105 \text{ г} \end{aligned} \quad (9)$$

При дальнейшем увеличении массы пара конечная температура не превысит $t_1 = 100^\circ\text{C}$. Требуемый график показан на рисунке.

$$\begin{aligned}
 Lm_3 &= c_0 m_0 (t_{нл.} - t_0) + \lambda m_0 + c_1 m_0 (t_1 - t_{нл.}) \\
 m_3 &= \frac{c_0 m_0 (t_{нл.} - t_0) + \lambda m_0 + c_1 m_0 (t_1 - t_{нл.})}{L} = \\
 &= \frac{2,1 \cdot 300 \cdot 10 + 330 \cdot 300 + 4,2 \cdot 300 \cdot 100}{2200} \approx 105 \text{ г}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

При дальнейшем увеличении массы пара конечная температура не превысит $t_1 = 100^\circ\text{C}$. Требуемый график показан на рисунке.



Отметим, что наклонные участки, строго говоря, не прямолинейны. Однако эти отклонения незначительны.

Отметим, что наклонные участки, строго говоря, не прямолинейны. Однако эти отклонения незначительны.