

Ошибочная разминка

Условие

Задача 1. «Ошибочная разминка»

В результате действия случайных или неслучайных факторов при проведении измерений величины X , результат получается неточным, с погрешностью ΔX . Случайные изменения относительно среднего значения называют флуктуациями. Диапазон значений, которые может принимать случайная величина, записывают в виде $X = X_0 \pm \Delta X$, а точность измерений при этом характеризуют относительной погрешностью $\delta = \Delta X/X_0$.

1.1. «Из пушки по...»

Как известно, максимальная дальность полета снарядов s_0 наблюдается при стрельбе под углом $\alpha_0 = 45^\circ$ (если местность, где происходит стрельба, плоская и можно пренебречь сопротивлением воздуха). Скорость вылета снаряда из пушки испытывает флуктуации (например, потому, что в них разное количество пороха), и поэтому при стрельбе под углом $\alpha_0 = 45^\circ$ снаряды летят на расстояние $s_0 \pm \Delta s_0$. Чему будет равна неточность Δs попадания в цель при стрельбе под другими углами α ? Изобразите примерный график зависимости $\Delta s(\alpha)$.

1.2. «Пружинные весы»

Для изготовления пружинных весов взяли пружину некоторой жесткости и массы и отградуировали шкалу согласно закону Гука $F = -kx$. При измерении веса тела массой M_0 показание пружинных весов оказалось завышенным и равным $P = M_0g + \Delta P_0$. Чему будет равна относительная ошибка измерения веса δ при помощи таких весов? Постройте примерный график зависимости относительной ошибки от массы взвешиваемого тела.

1.3. «Гальванометр»

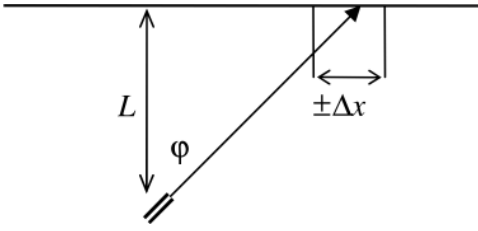
В гальванометре стрелка отклоняется по шкале пропорционально силе тока, протекающего через него. Максимальное отклонение стрелки достигается при силе тока $I_{\max}$. Гальванометр имеет собственное сопротивление, значение которого может находиться в диапазоне $R \pm \Delta R$, причем $\Delta R \ll R$. Из гальванометра можно сделать вольтметр, подключив к нему последовательно достаточно большое сопротивление R_V , или амперметр, подключив к нему параллельно сопротивление R_A . Чему равны максимальные погрешности ΔU и ΔI этих приборов? Изобразите примерные графики зависимости относительной погрешности напряжения, измеренного вольтметром, от сопротивления R_V и относительной погрешности силы тока, измеренной амперметром, от сопротивления R_A .

1.4. «Термометр»

При помощи термометра, имеющего теплоемкость C_0 и находящегося при комнатной температуре T_0 , измеряют температуру горячей воды массой m и удельной теплоемкостью c , находящейся в калориметре при температуре T . Чему будет равна относительная ошибка измерения температуры δ , вносимая термометром? Изобразите примерные графики зависимости относительной погрешности δ от измеряемой температуры воды T и от массы воды в калориметре m .

1.5. «Лазерный зайчик»

Лазер расположен на большом расстоянии L от длинной прямой стены. Тонкий лазерный луч направлен перпендикулярно стене ($\varphi_0 = 0$). Из-за внешних вибраций направление лазерного луча испытывает малые флуктуации, и лазерный «зайчик» бежит по стене в пределах $\pm \Delta x_0$. В каких пределах $\pm \Delta x$ будет смещаться пятно от лазера по стене, если луч направлен под углом φ ? Изобразите примерный график зависимости $\Delta x(\varphi)$.



Примечание

Для $\xi \ll 1$ справедливы следующие формулы: $\frac{1}{1+\xi} \approx 1 - \xi$ и $\operatorname{tg}(\alpha + \xi) \approx \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \xi$.

Решение

Задача 1. «Ошибочная разминка»

1.1. «Из пушки по...» Уравнения движения тела, брошенного с начальной скоростью v под углом к горизонту α :

$$x = v \cos \alpha \cdot t, \quad (1)$$

$$y = v \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

Дальность полета s можно определить, как горизонтальное расстояние, которое пролетел снаряд до момента падения

$$t^* = \frac{2v \sin \alpha}{g}, \quad (3)$$

$$s = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (4)$$

Если скорость вылета снаряда испытывает малые флуктуации $v = v_0 \pm \Delta v_0$, то и дальность полета будет испытывать малые флуктуации

$$s \pm \Delta s = \frac{(v_0 \pm \Delta v_0)^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{v_0^2 \pm 2v_0 \Delta v_0 + \Delta v_0^2}{g} \sin 2\alpha \approx \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \pm \frac{2v_0 \Delta v_0}{g} \sin 2\alpha, \quad (5)$$

откуда

$$\Delta s = \frac{2v_0 \Delta v_0}{g} \sin 2\alpha. \quad (6)$$

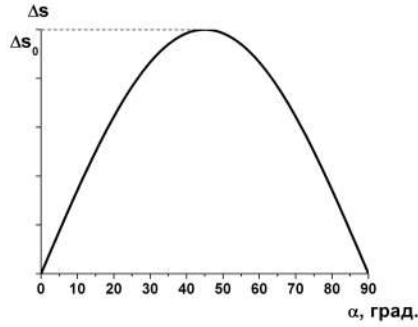
При стрельбе под углом $\alpha_0 = 45^\circ$ неточность стрельбы максимальна и равна

$$\Delta s_0 = \frac{2v_0 \Delta v_0}{g}. \quad (7)$$

Отсюда

$$\Delta s = \Delta s_0 \sin 2\alpha. \quad (8)$$

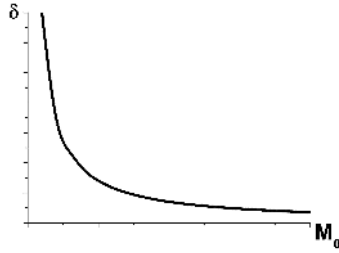
Примерный график зависимости $\Delta s(\alpha)$ изображен на рисунке.



1.2. «Пружинные весы» Очевидно, что показания весов оказались завышенными из-за того, что сама пружина имеет массу, а градуировка по закону Гука производилась при горизонтальном положении пружины. Это значит, что даже без груза весы будут показывать вес ΔP_0 - это и есть их абсолютная погрешность. Относительная погрешность пружинных весов равна

$$\delta = \frac{\Delta P_0}{M_0 g}. \quad (9)$$

Примерный график зависимости $\delta(M_0)$ - гипербола - представлен на



рисунк. **1.3. «Гальванометр»** Показания вольтметра будут пропорциональны силе тока, протекающего по нему. При подключении к его клеммам напряжения U сила тока в нем будет равна

$$I_0 \pm \Delta I_0 = \frac{U}{R_V + R \mp \Delta R} = \frac{U}{(R_V + R)(1 \mp \frac{\Delta R}{R_V + R})} \approx \frac{U}{(R_V + R)} (1 \pm \frac{\Delta R}{R_V + R}), \quad (10)$$

$$I_0 = \frac{U}{(R_V + R)}, \quad (11)$$

$$\Delta I_0 = \frac{U \Delta R}{(R_V + R)^2}. \quad (12)$$

Максимальное напряжение, которое можно измерить таким вольтметром, равно

$$U_{\max} = (R_V + R) I_{\max}, \quad (13)$$

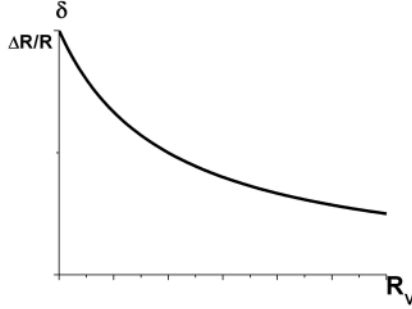
поэтому максимальная погрешность прибора

$$\Delta U_{\max} = (R_V + R) \Delta I_0 = \frac{U_{\max} \Delta R}{(R_V + R)} = I_{\max} \Delta R. \quad (14)$$

Относительная погрешность вольтметра равна

$$\delta_U = \frac{\Delta U}{U_{\max}} = \frac{\Delta I_0}{I_0} = \frac{\Delta R}{R_V + R}. \quad (15)$$

Примерный график зависимости относительной погрешности напряжения, измеренного вольтметром, от сопротивления R_V изображен на рисунке.



Поскольку для создания из гальванометра амперметра резистор R_A подключается к нему параллельно, сила тока I_0 , втекающая в прибор, будет перераспределяться между гальванометром I_G и подключенным к нему резистором I_R по правилам для параллельно соединенных проводников:

$$I_0 = I_G + I_R, \quad (16)$$

$$I_G R_G = I_R R_A. \quad (17)$$

Сила тока, текущего через гальванометр из (16) и (17) равна

$$I_G = I_0 \frac{R_A}{R_A + R_G}. \quad (18)$$

Поскольку сопротивление гальванометра имеет погрешность $R_G = R \mp \Delta R$, то и сила тока, измеряемая им, будет определена с погрешностью

$$I_G \pm \Delta I_G = I_0 \frac{R_A}{R_A + R \mp \Delta R} = I_0 \frac{R_A}{R_A + R(1 \mp \frac{\Delta R}{R+R_A})} = I_0 \frac{R_A}{R_A + R} \pm I_0 \frac{R_A \Delta R}{(R_A + R)^2}. \quad (19)$$

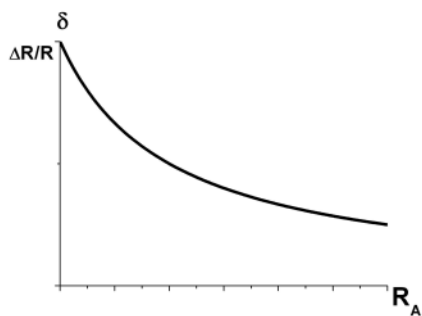
Погрешность измерения будет максимальна при пропускании через гальванометр максимального тока $I_{\max} = I_{0\max} \frac{R_A}{R_A + R}$ и равна

$$\Delta I_{G\max} = I_{0\max} \frac{R_A \Delta R}{(R_A + R)^2} = I_{\max} \frac{\Delta R}{R_A + R}. \quad (20)$$

Относительная погрешность измерений будет равна

$$\delta_I = \frac{\Delta I_G}{I_G} = \frac{\Delta R}{R + R_A}. \quad (21)$$

Примерный график зависимости относительной погрешности силы тока, измеренной амперметром, от сопротивления R_A изображен на рисунке.



1.4. «Термометр»

Уравнение теплового баланса

$$mcT + C_0T_0 = (mc + C_0)\Theta, \quad (22)$$

где Θ — установившаяся в равновесии температура.

$$\Theta = \frac{mcT + C_0T_0}{mc + C_0}. \quad (23)$$

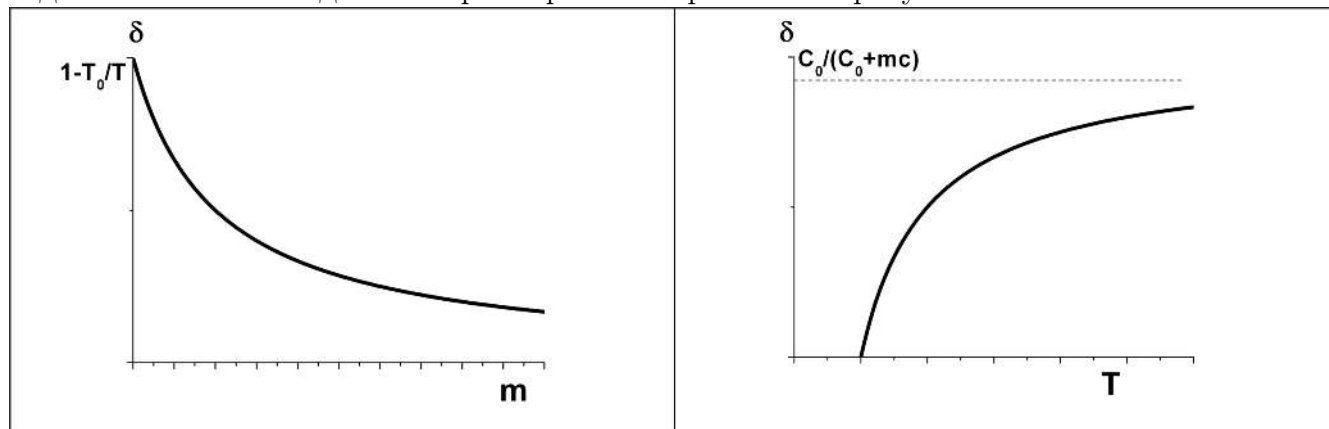
Погрешность измерения будет характеризоваться разностью между температурой воды до измерения и установившейся в тепловом равновесии температуры

$$\Delta T = T - \Theta = T - \frac{mcT + C_0T_0}{mc + C_0} = \frac{C_0(T - T_0)}{mc + C_0}. \quad (24)$$

Относительная погрешность

$$\delta = \frac{\Delta T}{T} = \frac{C_0}{C_0 + mc} \left(1 - \frac{T_0}{T}\right). \quad (25)$$

Примерные графики зависимости относительной погрешности δ от измеряемой температуры воды T и от массы воды в калориметре m изображены на рисунках.



1.5. «Лазерный зайчик»

1.5. «Лазерный зайчик»

Координата лазерного зайчика равна

$$x = L \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (26)$$

Поскольку угол испытывает флуктуации $\varphi \pm \Delta\varphi$, то зайчик смещается по стене. В случае, когда лазерный луч перпендикулярен стенке

$$\pm \Delta x_0 = L \cdot \operatorname{tg}(0 \pm \Delta \varphi) \approx \pm L \Delta \varphi, \quad (27)$$

откуда можно определить флуктуации угла

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta x_0}{L}. \quad (28)$$

В случае, когда лазерный луч идет под углом φ , координата равна

$$x \pm \Delta x = L \cdot \operatorname{tg}(\varphi \pm \Delta \varphi) \approx L \cdot \operatorname{tg} \varphi \pm L \frac{\Delta \varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad (29)$$

а флуктуации координаты зайчика

$$\Delta x = \frac{L \Delta \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\Delta x_0}{\cos^2 \varphi}. \quad (30)$$

График зависимости $\Delta x(\varphi)$ изображен на рисунке.

