

Формула Торричелли

Условие

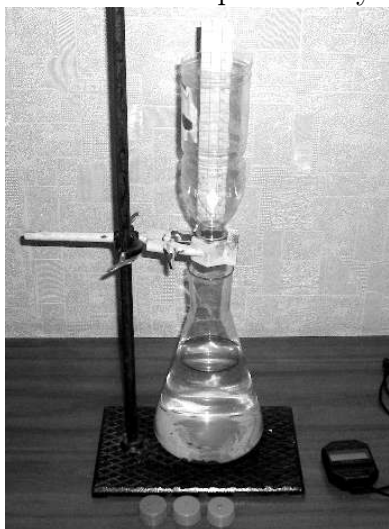
Задание 1. «Формула Торричелли»

Оборудование: бутылка пластиковая 0,5 л без дна, три пробки с дырками известных диаметров, полоска миллиметровой бумаги, скотч, секундомер, сосуд для воды (1 л), штатив с лапкой.

Для скорости вытекания воды из сосуда через небольшое отверстие Э. Торричелли установил формулу

$$V = \sqrt{2gh} , \quad (1)$$

где h - высота уровня жидкости над отверстием, $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ - ускорение свободного падения. Вам предстоит проверить справедливость этой формулы для скорости вытекания воды из бутылки через отверстие в пробке. Соберите установку, как показано на рисунке. Прикрепите к боковой поверхности бутылки полоску миллиметровой бумаги.



Часть 1. Теоретическая.

1.1 Считая формулу Торричелли справедливой покажите, для высота уровня жидкости в вертикальном цилиндрическом сосуде при вытекании воды через отверстие в дне зависит от времени по закону

$$h = h_0(1 - bt)^2 , \quad (2)$$

где h - высота уровня жидкости над уровнем отверстия, h_0 - начальная высота уровня жидкости, b - постоянный коэффициент, зависящий от размеров сосуда и отверстия.

1.2 Выразите коэффициент b в формуле (2) через параметры вашей установки и начальную высоту уровня жидкости в сосуде.

Часть 2. Закон вытекания.

2.1 Измерьте зависимость высоты уровня жидкости в сосуде от времени, при вытекании воды через отверстие минимального диаметра, постройте график полученной зависимости.

2.2 Проверьте выполнимость закона движения (2).

2.3 Определите при каком значении коэффициента b формула (2) наиболее точно описывает экспериментальные данные.

2.4 Сравните экспериментально определенное и рассчитанное значения этого коэффициента. Объясните причины возможных отклонений.

Часть 3. Другие отверстия.

3.1 Измерьте зависимость времени полного вытекания воды из бутылки (при постоянном начальном уровне) от диаметра отверстия.

3.2 Объясните полученные в п. 3.1 результаты, сравнив их с вашими расчетными значениями.

Решение

Задание 1. «Формула Торричелли»

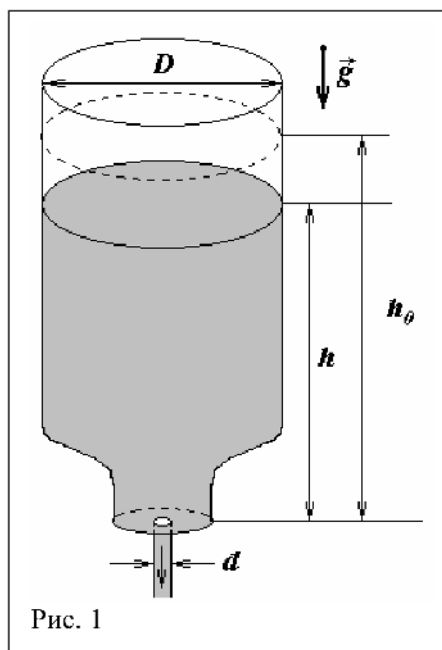
1.1 Пусть начальная высота жидкости в сосуде h_0 , внутренний диаметр сосуда D , диаметр отверстия d (рис.1). В момент, когда высота жидкости в сосуде равна h , скорость вытекания жидкости из сосуда, согласно формуле Торричелли $v(h) = \sqrt{2gh}$.

Соответственно, за малый промежуток времени Δt из отверстия вытечет вода объемом (считаем, что в течение этого малого промежутка времени скорость вытекания остается постоянной величиной)

$$\Delta V = \frac{\pi d^2}{4} v(h) \Delta t = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh} \Delta t.$$

Это вызовет понижение уровня воды в сосуде на величину

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gh} \Delta t. \quad (1)$$



Используя выражение, приведенное в условии, вычислим приращение Δh как разность $h(t + \Delta t) - h(t)$ при условии $\Delta t \rightarrow 0$

$$\Delta h = h_0(((1 - b(t + \Delta t))^2 - (1 + bt)^2) = 2h_0(1 - bt)b\Delta t. \quad (2)$$

Из формулы, приведенной в условии, найдем, что $(1 - bt) = \sqrt{\frac{h}{h_0}}$, с учетом чего (2) преобразуется к виду

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = 2h_0(1 - bt)b = 2h_0b\sqrt{\frac{h}{h_0}} = b\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\sqrt{2gh} = \{(1)\} = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2hg}. \quad (3)$$

1.2 Из (3) следует выражение для коэффициента b через параметры установки

$$b = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{\frac{g}{2h_0}}. \quad (4)$$

Из (4) следует важный вывод: для соблюдения постоянства коэффициента b следует проводить измерения только в цилиндрической части бутылки, т.е. до тех пор, пока вода не опустилась до сужающейся (нижней) части бутылки.

Часть 2. Закон вытекания.

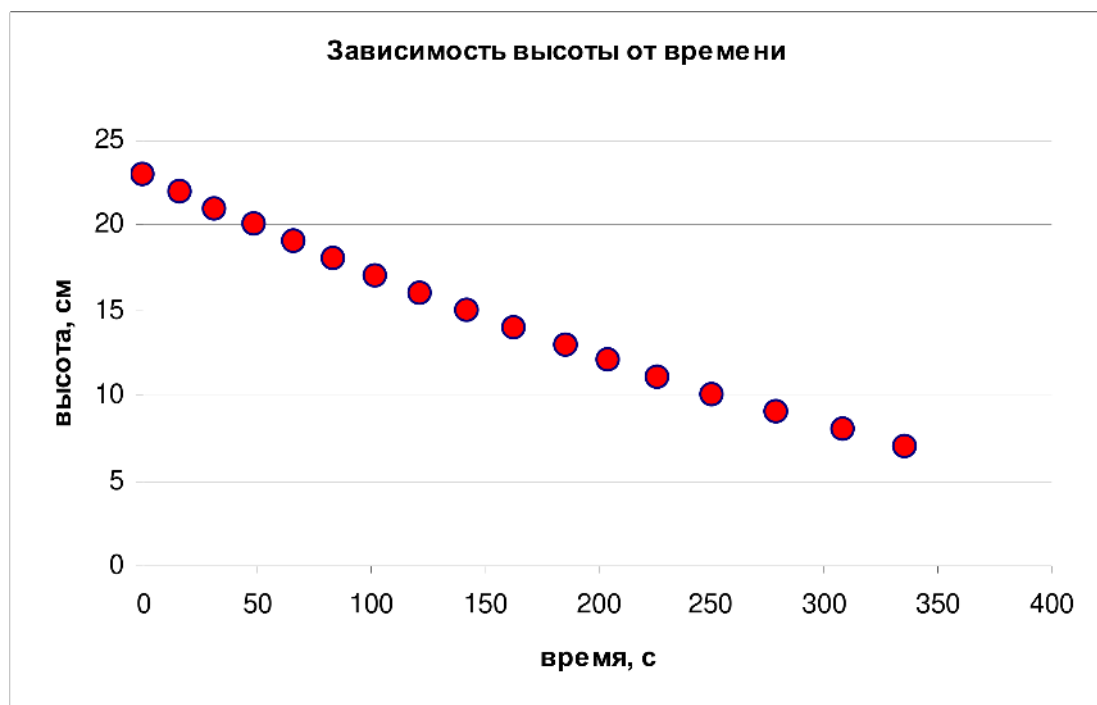
2.1 Аккуратно заливаем воду в бутылку и измеряем зависимость высоты уровня воды в сосуде H от времени t .

В таблице приведены экспериментальные данные для пластиковой бутылки объемом 1 литр при диаметре пробки 1,6 мм.

Построим график приведенной зависимости.

Как видим из графика, полученная зависимость явно нелинейна, поскольку в конце процесса выливания скорость жидкости явно уменьшается.

Н, см	t, с
23	0
22	16
21	32
20	49
19	67
18	84
17	102
16	122
15	143
14	164
13	186
12	205
11	227
10	251
9	279
8	308
7	336

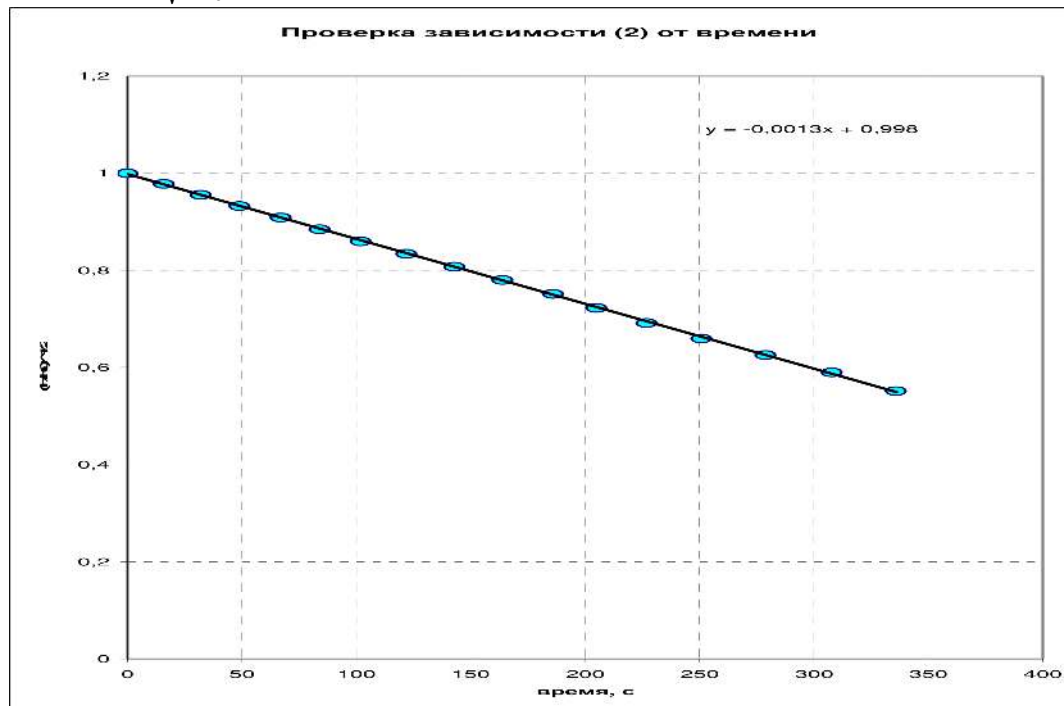


2.2 Как следует из пункта 2.1, для проверки выполнимости закона (2) необходимо линеаризовать систему, т.е. преобразовать выражение (2) таким образом, чтобы полученная зависимость представляла бы собой прямую линию.

В нашем случае это удобно сделать следующим образом

$$\sqrt{\frac{h(t)}{h_0}} = 1 - bt,$$

где значение коэффициента b найдено в пункте 1.2. Соответственно, построим зависимость величины $\sqrt{\frac{h(t)}{h_0}}$ от времени.



Как видим из полученной диаграммы, в данном случае экспериментальные точки достаточно хорошо ложатся на прямую, что подтверждает справедливость зависимости (2).

2.3 Для определения оптимального значения коэффициента можно применить метод МНК для линейной зависимости. Так, для экспериментальных данных, приведенных в таблице, это значение составляет $b = 0,0013 \text{ с}^{-1}$.

2.4. В качестве причин возможных отклонений следует назвать наличие у жидкости вязкости (внутреннего трения), возможное неламинарное течение (завихрений) при приближении уровня воды к отверстию, поверхностное натяжение жидкости.

Часть 3. Другие отверстия.

3.1 Как следует из полученных зависимостей, время τ вытекания обратно пропорционально значению коэффициента $b = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{\frac{g}{2h_0}}$, который при прочих равных условиях прямо пропорционален квадрату диаметра отверстия. Отсюда следует, что

$$\tau \propto \frac{1}{d^2}.$$

Таки образом, отношение времен вытекания воды из бутылки при разных диаметрах отверстий определяется отношением обратных квадратов их радиусов

$$\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = \frac{1}{d_1^2} : \frac{1}{d_2^2} : \frac{1}{d_3^2}.$$

Соответственно, в нашем случае

$$\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = \frac{1}{1} : \frac{1}{4} : \frac{1}{9} = 36 : 9 : 4.$$

С учетом погрешности эксперимент дает близкие значения.