

Качательные

Условие

Задание 1. «Качательные» колебания.

Оборудование: цилиндр металлический, линейка деревянная, секундомер, пластилин, палочка деревянная.

С помощью пластилина прикрепите к боковой грани цилиндра деревянную палочку. Расположите цилиндр с закрепленной палочкой на линейке расположенной на краю стола. При этом цилиндр должен двигаться, вращаясь по линейке.

Часть 1. Период колебаний.

Если центр тяжести палочки расположен ниже точки крепления, то цилиндр совершает колебательное движение. В данной части работы колебания должны быть малыми.

1.1 Измерьте зависимость периода колебаний цилиндра от расстояния от оси цилиндра до центра масс палочки. Постройте график полученной зависимости.

1.2 Покажите (теоретически), что данная зависимость имеет степенной вид

$$T = Cz^\alpha. \quad (1)$$

1.3 Проверьте выполнимость данной формулы на основании ваших экспериментальных данных. Определите показатель степени α .

Часть 2. Затухание колебаний.

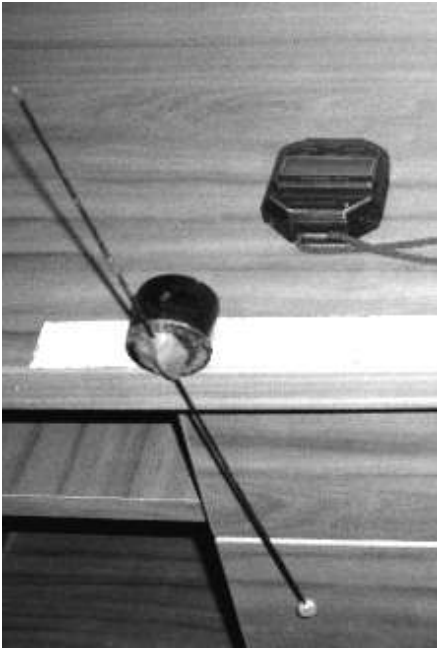
Колебания цилиндра являются затухающими из-за наличия трения качения. Сила трения качения описывается формулой

$$F = \frac{k}{R}N, \quad (2)$$

где N - сила нормальной реакции, R - радиус цилиндра, k - коэффициент трения качения, имеющий размерность длины. При изучении затухания рекомендуется исследовать колебания с большой амплитудой.

2.1 Измерьте зависимости отклонения от положения равновесия оси цилиндра (в точках остановки) от числа совершенных колебаний при двух положениях палочки.

2.2 Постройте графики зависимости энергии цилиндра (*подсказка – в точках остановки*) от пройденного пути. Рассчитайте по этим данным коэффициент трения качения цилиндра.



Решение

Задание 1. «Качательные» колебания.

При колебательном движении механическая энергия системы складывается из кинетической и потенциальной энергий всех тел, образующих систему.

Будем считать, что кинетической энергией деревянной палочки и центрирующего кусочка пластилина на ее конце можно пренебречь в силу малости их массы ($m \approx 5$ г) по сравнению с массой грузика ($M \approx 100$ г).

Тогда кинетическая энергия системы будет определяться только кинетической энергией грузика (цилиндра), которая при качении может быть найдена как сумма его кинетических энергий поступательного и вращательного движений

$$E_K = \frac{Mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad (1)$$

где v — скорость поступательного движения грузика (рис. 1), M — его масса, ω — угловая скорость вращения грузика, J — момент инерции грузика (цилиндра) относительно оси, проходящей через его центр масс.

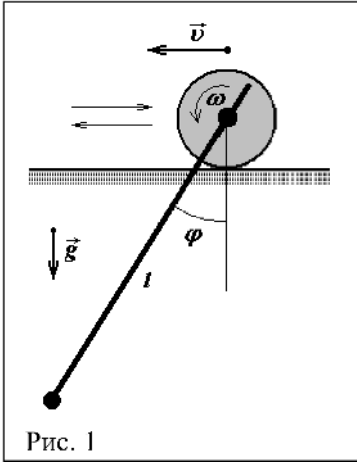
С учетом того, что качение грузика по горизонтальной поверхности происходит без проскальзывания, можем записать

$$v = \omega R. \quad (2)$$

С учетом (2) перепишем (1) в виде

$$E_K = \frac{M\omega^2 R^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{J'\omega^2}{2},$$

где $J' = J + mR^2$.



Запас потенциальной энергии системы при отклонении от положения равновесия определяется только увеличением потенциальной энергии палочки, поскольку грузик движется по горизонтальной поверхности. Иными словами, здесь уже нельзя пренебречь массой палочки m

$$E_{\Pi} = mgl \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi) = mgl \frac{l}{2} 2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \approx \frac{mgl}{2} \frac{\varphi^2}{2}, \quad (3)$$

где φ — угол отклонения палочки от вертикали в процессе малых ($\varphi \rightarrow 0$) крутильных колебаний, l — расстояние от точки крепления палочки на грузике до центра масс палочки (фактически до ее середины). Массой центрирующего грузика на кончике палочки пренебрежем.

В пренебрежении действием силы трения запишем закон сохранения механической энергии при колебательном движении

$$\frac{mgl}{2} \frac{\varphi^2}{2} + \frac{J'\omega^2}{2} = \text{const},$$

дифференцируя который приходим к уравнению гармонических колебаний

$$\varphi''(t) + \Omega^2 \varphi(t) = 0,$$

где $\Omega = \sqrt{\frac{mgl}{2J'}}$.

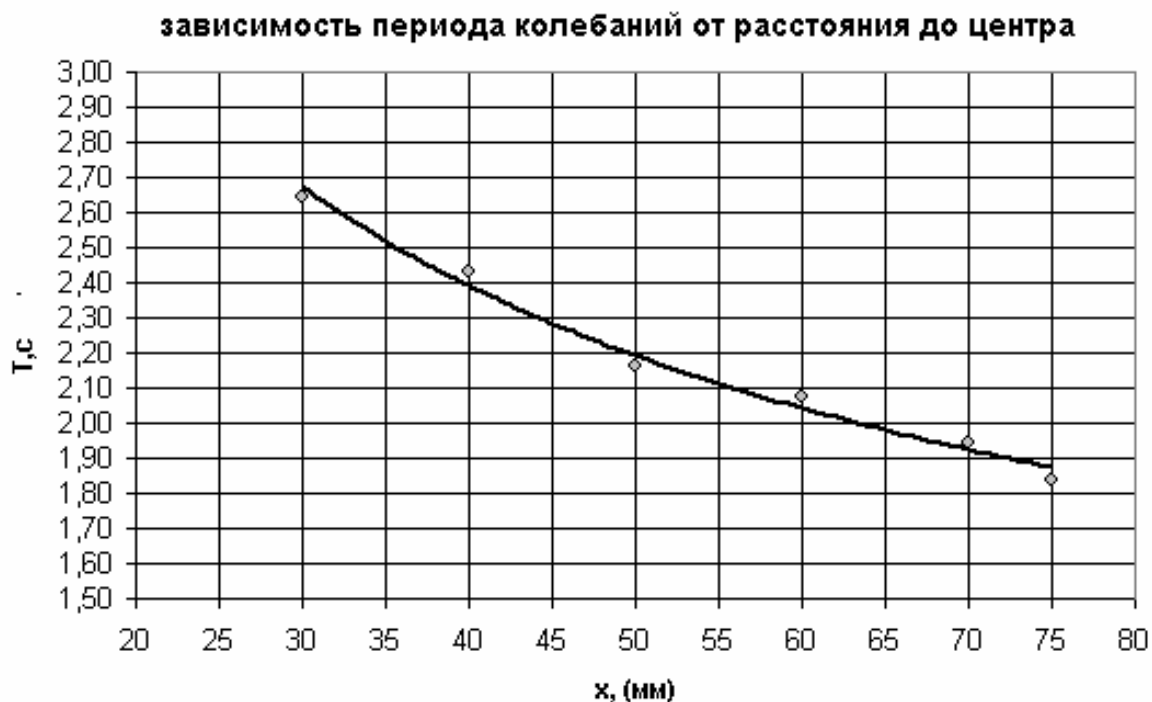
Соответственно, период малых крутильных колебаний цилиндра с легкой палочкой по горизонтальной поверхности

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2J'}{mgl}}. \quad (4)$$

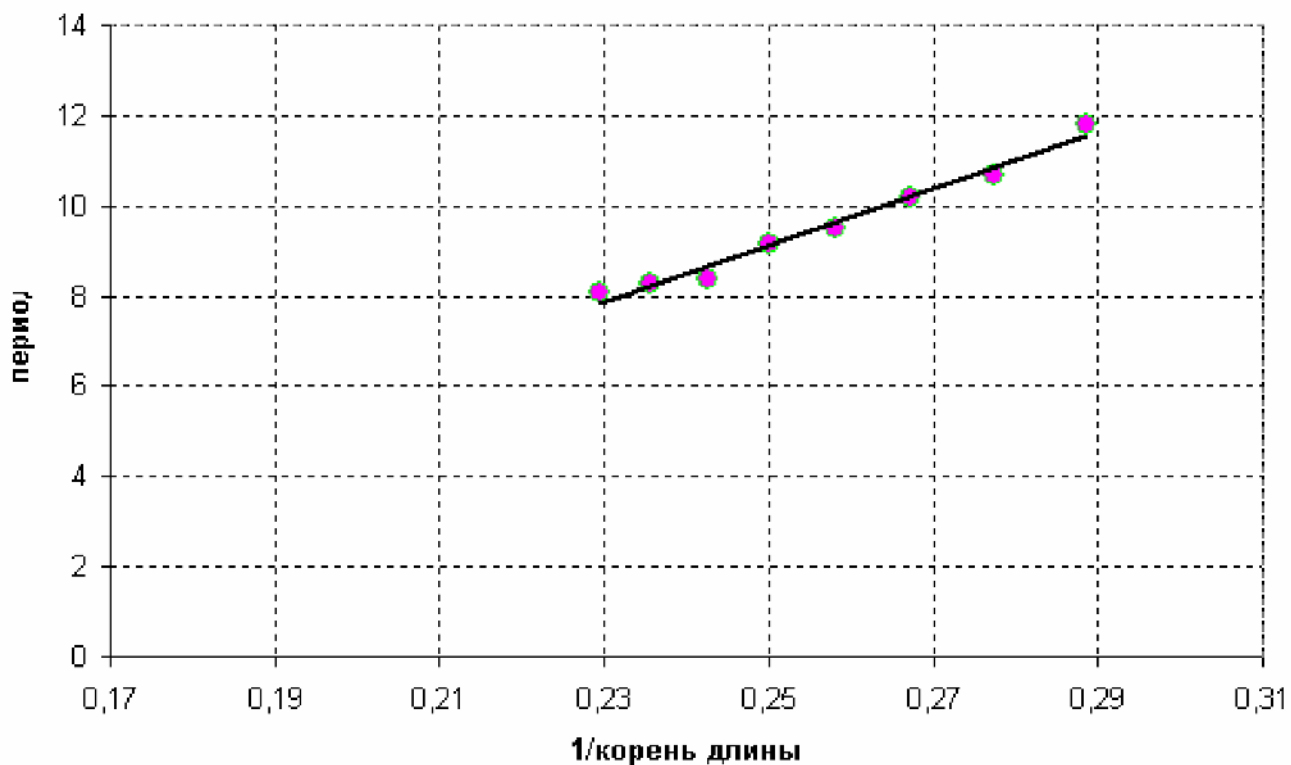
Как следует из (4), период колебаний T обратно пропорционален расстоянию от оси цилиндра до центра масс системы

$$T \propto \frac{1}{\sqrt{l}}.$$

Построим график полученной зависимости по экспериментальным точкам: зависимость периода колебаний от расстояния до центра

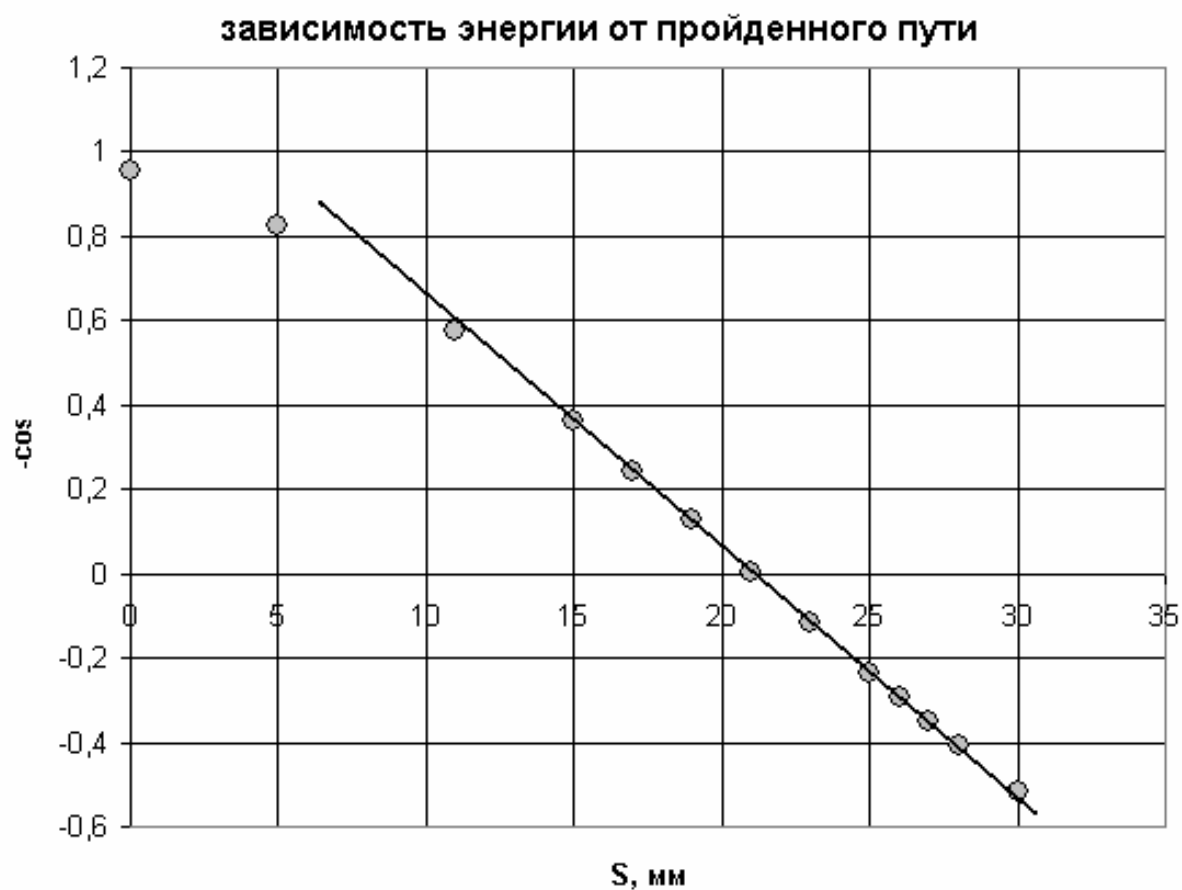


То, что показатель степени примерно равен $1/2$ можно показать, построив зависимость квадрата периода от величины обратной расстоянию до центра, либо периода колебаний от $\frac{1}{\sqrt{l}}$, получается вполне приличная линейная зависимость.



2. Будем считать, что сила трения качения остается постоянной. Тогда ее работа прямо пропорциональна пути, пройденному цилиндром по горизонтальной поверхности. Если отклонение от положения равновесия равно Δx , то энергия в крайних положениях пропор-

циональна $-\cos \varphi$, где $\varphi = \frac{\Delta x}{R}$ - угол отклонения стержня от вертикали. График зависимости показан на рисунке.



По наклону графика можно определить коэффициент трения качения (отношение масс цилиндра и стержня определяется из периода колебаний).