

Ваттметр

Условие

Задание 2. «Ваттметр»

Существует множество хитроумных устройств, измеряющих мощность в цепи постоянного тока. Принцип их работы сводится к тому, чтобы каким-либо способом перемножить ток и напряжение на нагрузке. Мы предлагаем Вам рассмотреть наиболее простую схему такого устройства, состоящую из резисторов, вольтметра и двух диодов.

2.1. Сначала разберемся с диодом. Этот полупроводниковый прибор является нелинейным элементом, т.е. сила тока не пропорциональна напряжению. В данной задаче диоды будут включаться в прямом направлении. В этом случае можно считать, что сила тока пропорциональна квадрату напряжения:

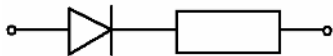
$$I_D = kU_D^2,$$

где k — известный коэффициент.

¹ Механизм разделения зарядов в восходящих потоках очень сложен и в данной задаче не рассматривается.

2.1.1 Рассмотрим участок цепи, состоящей из последовательно включенного диода и резистора с сопротивлением R (рис. 1). Разность потенциалов на участке равна $\Delta\varphi$. Определите силу тока, текущего в этом участке.

2.1.2 Определите разность потенциалов на резисторе $\Delta\varphi_R$.



2.1.3 Покажите, что если выполняется условие:

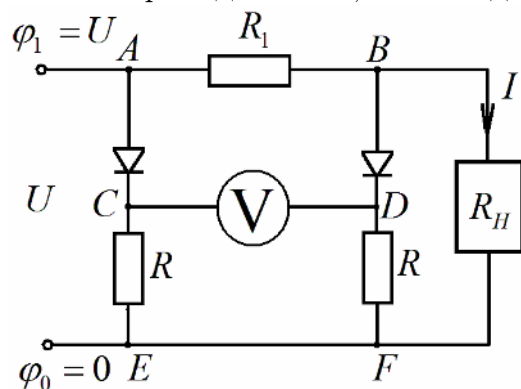
$$kR\Delta\varphi \ll 1,$$

то сила тока в таком участке $I \approx k(\Delta\varphi)^2$, а разность потенциалов на резисторе $\Delta\varphi_R \approx Rk(\Delta\varphi)^2$.

Воспользуйтесь формулой приближенного вычисления:

$$(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x \quad x \ll 1.$$

2.2 Схема ваттметра представлена на рис.2. Устройство состоит из двух участков с диодами (AE и BF), резистора R_1 и вольтметра. Сопротивление резистора R , гораздо больше сопротивления нагрузки ($R \gg R_H$). Кроме того, выполняется условие пункта 1.3: $kR\Delta\varphi \ll 1$. Вольтметр — идеальный, т.е. обладает очень большим сопротивлением.



2.2.1 Напряжение в цепи равно U , сила тока, текущего в нагрузке, равна I . Выберем потенциал нижнего проводника равным нулю ($\varphi_0 = 0$ В), а потенциал второго проводника, идущего от источника напряжения, $\varphi_1 = U$ (точка A на рис. 2). Определите потенциалы точек B , C и D .

2.2.2 Определите разность потенциалов между точками C и D . Преобразуйте, полученное выражение к виду:

$$U_V = \xi IU.$$

Выразите коэффициент ξ через k , R , R_1 и R_H .

2.2.3 Покажите, что при малом сопротивлении резистора R_1 по сравнению с сопротивлением нагрузки ($R_1 \ll R_H$), коэффициент ξ не зависит от R_H , а определяется только характеристиками элементов ваттметра.

2.2.4 Определите относительную погрешность η измерения мощности в приближении, описанном в предыдущем пункте.

Решение

Задание 2. «Ваттметр»

1.1 Если по участку течет ток I , то падение напряжения на диоде

$$U_D = \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{k}}, \quad (1)$$

а напряжение на резисторе

$$U_R = IR. \quad (2)$$

Сумма этих напряжений равна разности потенциалов на всем участке цепи:

$$U_D + U_R = \Delta\varphi. \quad (3)$$

Подставляя значения (1) и (2), получим квадратное уравнение относительно $\sqrt{I}$:

$$IR + \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{I} - \Delta\varphi = 0. \quad (4)$$

Физический смысл имеет только положительный корень этого уравнения:

$$\sqrt{I} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4kR\Delta\varphi}}{2R\sqrt{k}}. \quad (5)$$

Тогда

$$I = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4kR\Delta\varphi}}{2R\sqrt{k}} \right)^2. \quad (6)$$

1.2 Разность потенциалов на резисторе:

$$\Delta\varphi_R = IR = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4kR\Delta\varphi}}{2R\sqrt{k}} \right)^2 R. \quad (7)$$

1.3 При выполнении условия $kR\Delta\varphi \ll 1$, формула (6) преобразуется к виду:

$$I \approx \left(\frac{-1 + (1 + 2kR\Delta\varphi)}{2R\sqrt{k}} \right)^2 = k(\Delta\varphi)^2, \quad (8)$$

а формула (7) – к виду:

$$\Delta\varphi_R = Rk(\Delta\varphi)^2. \quad (9)$$

2.1 Т.к. $R \gg R_{\text{н}}$, то ток через резисторы R_1 равен току через нагрузку. Поэтому падение напряжения на резисторе R_1 :

$$U_1 = IR_1. \quad (10)$$

Тогда потенциал точки B :

$$\varphi_B = U - U_1 = U - IR_1. \quad (11)$$

Напряжение на участке AE равно U . Напряжение на резисторе R определим, воспользовавшись выражением (9):

$$\Delta\varphi_{RAE} = RkU^2. \quad (12)$$

Тогда потенциал точки C :

$$\varphi_C = 0 + \Delta\varphi_{RAE} = RkU^2. \quad (13)$$

Напряжение на участке BF равно $\varphi_B = U - IR_1$. Поэтому напряжение на резисторе R :

$$\Delta\varphi_{RBF} = Rk(U - IR_1)^2 \quad (14)$$

Потенциал точки D :

$$\varphi_D = 0 + \Delta\varphi_{RBF} = Rk(U - IR_1)^2. \quad (15)$$

2.2 Разность потенциалов между точками C и D :

$$\begin{aligned} U_V = \varphi_C - \varphi_D &= RkU^2 - Rk(U - IR_1)^2 = \\ &= 2kRR_1UI - kRR_1^2I^2 = 2kRR_1UI \left(1 - \frac{R_1I}{2U} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Ток и напряжения связаны законом Ома, т.е.:

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{R_{\text{н}} + R_1}. \quad (17)$$

Поэтому показания вольтметра:

$$U_V = 2kRR_1UI \left(1 - \frac{R_1}{2(R_1 + R_{\text{н}})} \right). \quad (18)$$

Коэффициент ξ :

$$\xi = 2kRR_1 \left(1 - \frac{R_1}{2(R_1 + R_{\text{н}})} \right). \quad (19)$$

2.3 При выполнении условия $R_1 \ll R_{\text{н}}$ выражение для коэффициента ξ принимает вид:

$$\xi = 2kRR_1, \quad (19)$$

Т.е. действительно не зависит от сопротивления нагрузки. 2.4 Относительная погрешность измерения:

$$\eta = \frac{kRR_1^2}{R_1 + R_{\text{н}}} \approx \frac{kRR_1^2}{R_{\text{н}}}. \quad (20)$$

$$2R\sqrt{k}$$