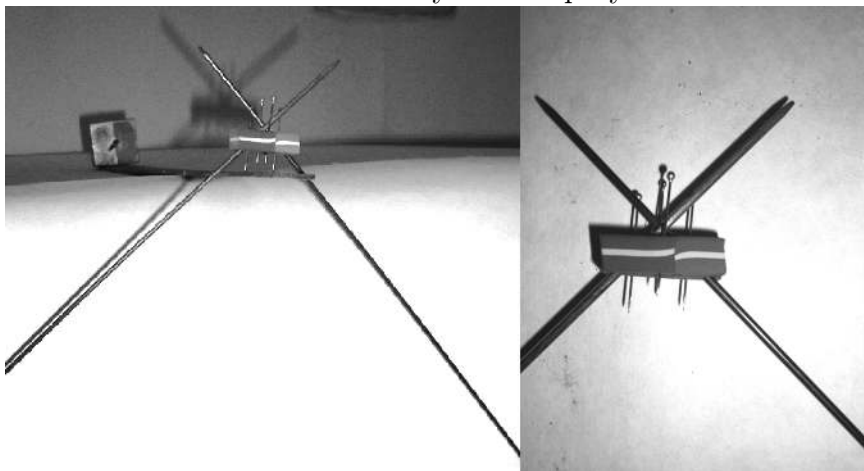


Как устоять на иголке!

Условие

Задание 2. «Как устоять на иголке!»**

В данной работе вам необходимо экспериментально исследовать два типа колебаний маятника с двумя спицами. Не увлекайтесь теоретическими расчетами – они сложны и громоздки (и не оцениваются!). От Вас требуются тщательные и аккуратные измерения и разумные качественные объяснения полученных результатов.



Часть 1. Изготовление маятника.

Изготовьте маятник, как показано на photographиях. Проткните ластик двумя спицами симметрично, так, чтобы спицы располагались под углом около 45° к горизонту (примерно под прямым углом друг к другу). В качестве упора используйте две пары булавок – одна в плоскости спиц; вторая в перпендикулярной плоскости.

Вдвигая и выдвигая эти пары, Вы можете изучать продольные (в плоскости спиц, вокруг оси OX ; будем обозначать период этих колебаний T_1) и поперечные (перпендикулярно плоскости спиц, вокруг оси OY , их период - T_2) колебания. Прикрепите к столу с помощью скотча деревянную линейку, так чтобы ее конец примерно на 7-10 см выступал над краем стола. Маятник поставьте на конец линейки. Убедитесь, что маятник может совершать как продольные, так и поперечные колебания (для этого нужно выдвигать нужные пары булавок – упоров).

Расстояние от концов булавок упоров до ластика примерно 1 см.

В качестве изменяемого (и легко измеряемого) параметра маятника используется длина свободной части спицы z - расстояние от ластика до конца спицы.

1.1 Измерьте длину спиц и угол между ними, приведите полученные значения в вашей тетради.

Часть 2. Изучение колебаний.

2.1 Измерьте зависимости периодов продольных T_1 и поперечных колебаний T_2 от длины свободной части спицы z . Постройте графики полученных зависимостей.

Оцените погрешность измерения периода. Достаточно для одного типа колебаний и одного значения z , для остальных значение погрешности будет приблизительно таким же.

При проведении измерений изменяйте длины нижних частей спиц (параметр z). Для каждой установки спиц измерьте периоды продольных и поперечных колебаний (вдвигать и выдвигать булавки легче, чем спицы).

Помните – оценивается диапазон изменения параметров!

2.2 При $z \approx 0,75L \div 0,85L$ функция зависимости периода колебаний от параметра z имеет слабый минимум. Проведите дополнительные экспериментальные исследования в этой области.

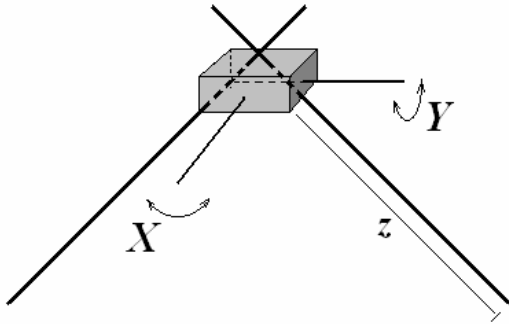
Определите значение z^* , при котором период поперечных колебаний минимален и значение этого периода $T_{2\min}$.

Постарайтесь получить значения этих величин с меньшей погрешностью.

Оценивать сами погрешности в данном пункте не следует!*

2.3 Постройте график зависимости отношения периодов колебаний $\frac{T_2}{T_1}$ от длины свободной части спицы z . Качественно объясните полученную зависимость.

2.4 При больших z отношение $\frac{T_2}{T_1}$ остается приблизительно постоянным. Укажите диапазон изменения z , в пределах которого это отношение можно считать постоянным. Определите значение этого отношения и его погрешность.



Решение

***Задание 2. «Как устоять на иголке!»

Лишнее теоретическое введение.***

Рассмотрим идеализированную систему, упрощающую исследуемый маятник: пренебрежем высотой иголок (т.е. будем считать, что оси вращения проходят через точку пересечения спиц); пренебрежем массой булавок и ластика. Эта модель показана на рисунке – спицы находятся в вертикальной плоскости, проходящей через ось Oy .

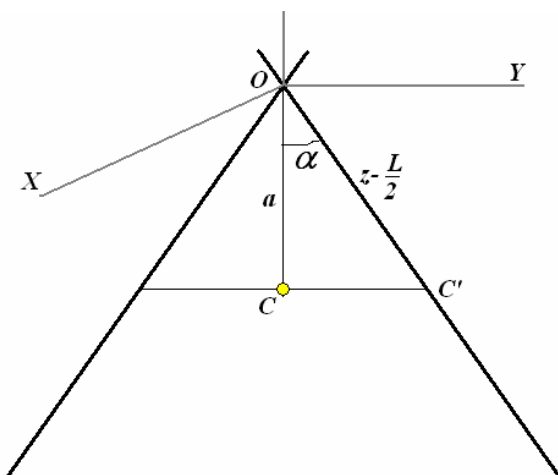
Период колебаний математического маятника определяется по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}, \quad (1)$$

где I - момент инерции относительно оси вращения, a - расстояние от оси вращения до центра масс, m - масса маятника.

С помощью этой формулы и теоремы Штейнера можно записать выражения для периодов: продольных колебаний (вокруг оси Ox)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{L^2}{12} + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}{g \left(z - \frac{L}{2}\right) \cos \alpha}}; \quad (2)$$



Поперечных колебаний (вокруг оси Oy)

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{L^2}{12} \cos^2 \alpha + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2 \cos^2 \alpha}{g \left(z - \frac{L}{2}\right) \cos \alpha}} = T_1 \cos \alpha. \quad (3)$$

При выводе учтено, что момент инерции тонкой однородной спицы относительно оси перпендикулярной спице и проходящей через ее центр масс равен $I_0 = \frac{mL^2}{12}$.

Функция (2) имеет минимум при

$$z = \frac{L}{2} + \frac{L}{\sqrt{12}} \approx 0,79L, \quad (4)$$

который равен

$$T_{1 \min} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\sqrt{12} \cos \alpha} \frac{L}{g}}. \quad (5)$$

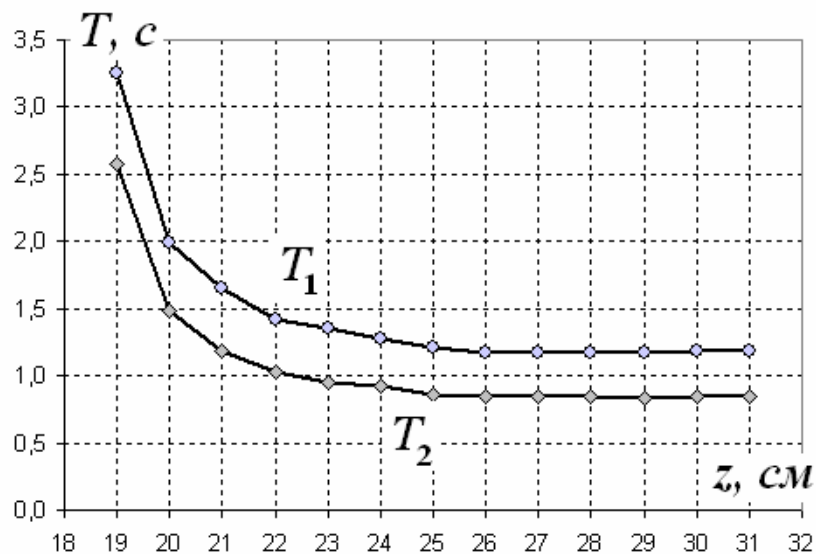
Эти теоретические измышления и послужили основой данной задачи. Правда ластик и булавки приводят к некоторым отклонениям, особенно существенным, когда длина нижней части спиц приближается к половине ее длины.

Решение.

1. В наших экспериментах использовались стальные спицы длиной 34 см с небольшой пластмассовой головкой. Угол между спицами близок к 90 градусам. 2.1 Таблица результатов измерений и построенные по ним графики представлены в таблице и на рисунке.

Таблица 1.

z , см	T_2 , с	T_1 , с
31	0,844	1,186
30	0,842	1,185
29	0,838	1,171
28	0,844	1,170
27	0,845	1,169
26	0,849	1,175
25	0,865	1,209
24	0,918	1,269
23	0,949	1,347
22	1,026	1,424
21	1,183	1,655
20	1,478	1,987
19	2,570	3,255



Для оценки погрешности необходимо провести несколько измерений при одном значении параметра z . Мы провели эти измерения для поперечных колебаний при $z = 250$ мм. Получен следующий ряд значений для времени 10 колебаний: 8,79; 8,71; 8,71; 8,78; 8,78 с. Среднее значение периода

$$\langle T \rangle = \frac{\sum_{k=1}^5 t_k}{50} = 0,8754 \text{ с.}$$

Тогда случайная погрешность результата одного измерения периода равна

$$\Delta T_{\text{сл.}} = 2 \sqrt{\frac{\sum_k (T_k - \langle T \rangle)^2}{N - 1}} \approx 8,1 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

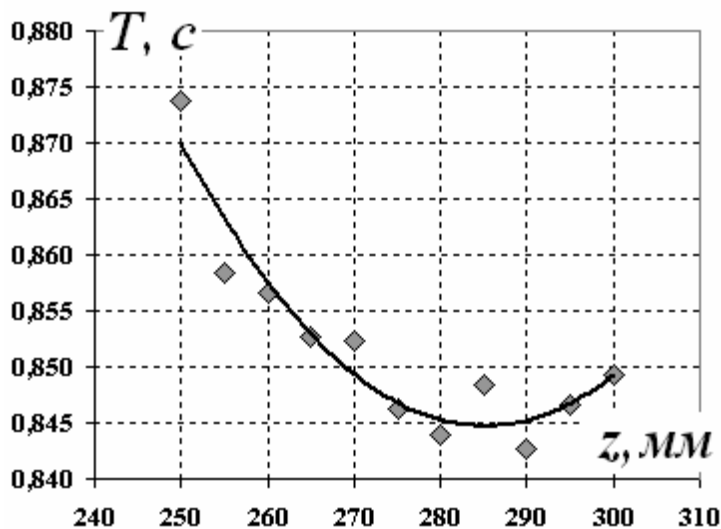
Приборную погрешность измерения времени следует принять равной цене деления (для электронного секундомера $1 \cdot 10^{-2}$ с), следовательно, приборная погрешность измерения периода (по 10 колебаниям) следует считать равной $\Delta T_{\text{пр.}} = 1 \cdot 10^{-3}$ с. Как и следовало ожидать основная погрешность случайная, поэтому можно принять, что погрешность измерения периода (слегка завышенная) $\Delta T = 1 \cdot 10^{-2}$ *с

Примечания. 1. Случайная погрешность может быть оценена и другим «школьным» методом, как среднее значение модулей отклонения. 2. Время реакции человека мы относим к случайным погрешностям. 2. Конечно, не следует ожидать от участников тщательного анализа погрешностей. Но, они обязаны оценить случайную, приборную и полную погрешности измерения периода,* которая должна составлять величину порядка $\Delta T = 1 \cdot 10^{-2}$ с.

2.2 Дополнительные измерения необходимо провести с меньшим шагом и провести несколько измерений (минимум 3) для каждого значения параметра z , после чего провести усреднение. Результаты этих измерений (времен 10 колебаний – три измерения, рассчитанный период) приведены в таблице, на основании которой построен график зависимости периода от параметра z .

Таблица.

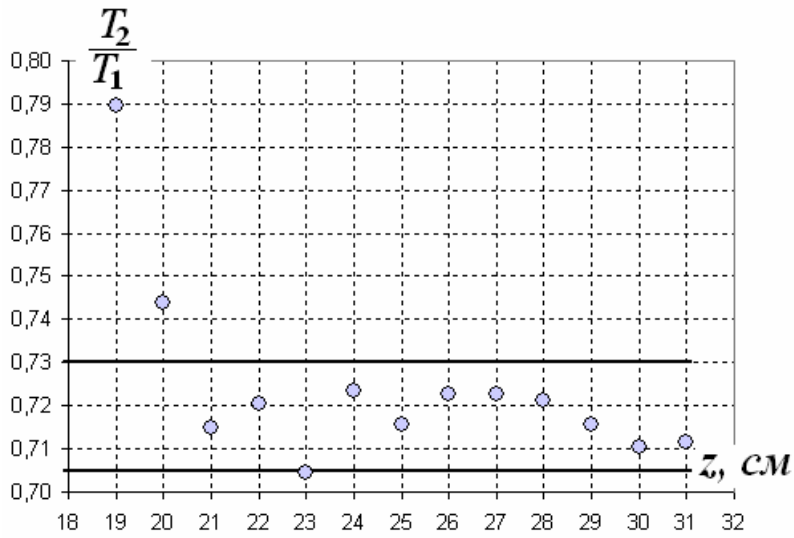
z , мм	t_1 , с	t_2 , с	t_2 , с	T , с
300	8,53	8,47	8,48	0,849
295	8,47	8,46	8,47	0,847
290	8,45	8,44	8,39	0,843
285	8,49	8,50	8,46	0,848
280	8,45	8,44	8,43	0,844
275	8,46	8,48	8,45	0,846
270	8,53	8,53	8,51	0,852
265	8,52	8,55	8,51	0,853
260	8,57	8,56	8,57	0,857
255	8,57	8,60	8,58	0,858
250	8,79	8,71	8,71	0,874



Затем по нанесенным точкам необходимо нанести плавную кривую, похожую на параболу и уже по ней определить значения требуемых параметров. По нашим данным $z^* \approx 285$ мм, $T_{2\min} \approx 0,845$ с.

2.3 Расчет значений отношения $\frac{T_2}{T_1}$ и график его зависимости от параметра z представлены ниже.

<i>z</i>, см	<i>T</i>₁/<i>T</i>₂
31	0,712
30	0,711
29	0,716
28	0,721
27	0,723
26	0,723
25	0,715
24	0,723
23	0,705
22	0,721
21	0,715
20	0,744
19	0,790



Видно, что это отношение действительно остается постоянным при $z \geq 21$ см. Для подтверждения этого утверждения следует стандартным образом определить среднее значение и погрешность расчета данного отношения по всем значениям при $z \geq 21$ см. По нашим данным значение равно $\frac{T_2}{T_1} = 0,717 \pm 0,012$. Отметим, что оно близко к теоретическому значению $\cos 45^\circ \approx 0,707$.